№ 5 (76) 2010
Выпуск 18
НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского государственного университета
Математика Физика

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics Physics

Основан в 1995 г.
Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Учредитель:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»

Издатель:
Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-21121 от 19 мая 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. 5

К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре.
Е.А. Абаполова, А.П. Солдатов 6

К вопросу о возмущении абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Римана-Лиувилля.
Х.К. Авад, А.В. Глушак 21

Существование собственных функций спектральной задачи Трикоми для многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения.
С.А. Алдашев 27

Интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в весовых комплексных пространствах Лебега.
С.Н. Асхабов 33

Экспоненциальное разложение распределения вероятностей значений квадратичного функционала от траекторий процесса Орнштейна-Уленбека.
Ю.П. Вирченко, А.С. Мазманишвили 48

Об одной вспомогательной задаче нелинейной диффузии в слабосжимаемой вязкой жидкости.
Св. А. Гриценко, Р.Н. Зимин 71

О некоторых аддитивных задачах теории чисел.
С.А. Гриценко, Н.Н. Моткина 83

О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа.
А.И. Кожанов 88

Оригинал-макет *Бекназаров М.Н.*
E-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Подписано в печать 30.03.2010
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 20,22
Тираж 1000 экз.
Заказ 53

Подписные индексы
в каталоге агентства «Роспечать» – 81631,
в объединенном каталоге
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован
в издательстве Белгородского государственного университета
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Об одном преобразовании кратного ряда Лорана.
А.П. Ляпин 99

Вывод уравнений фильтрации несжимаемой жидкости в несжимаемом упругом скелете с краевыми условиями смешанного типа: случай односкоростного континуума.
Л.Ф. Маслакова, А.М. Мейрманов 109

О разрезах, примыкающих к дискриминантному множеству алгебраического уравнения.
Е.Н. Михалкин 119

Задачи типа Дирихле и Гильберта для эллиптических систем второго и третьего порядка с сверхсингулярной точкой.
А.Б. Расулов 127

Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона.
С.М. Ситник 135

О суммировании функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии.
М.В. Шевцова 154

Сведения об авторах 170

Информация для авторов 172

№ 5 (76) 2010
Issue 18

SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Founded in 1995

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers.

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского государственного университета
Математика Физика

Founder:
State educational establishment of higher professional education "Belgorod State University"

Publisher:
Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media
ПИ № ФС 77-21121 May, 19 2005.

CONTENTS

Introduction 5

To the theory of singular integral equation on smooth contours.
E.A. Abapolova, A.P. Soldatov 6

On the perturbation abstract differential equations containing fractinal derivatives of Riemann-Liouville.
H.K. Avad, A.V. Glushak 21

The existence of eigenfunctions of the spectral Tricomi problem for a multi-dimensional mixed hyperbolic-parabolic equation.
S.A. Aldashev 27

Integral equations with potential type kernels In weighted complex Lebesgue spaces.
S.N. Askhabov 33

The exponential expansion of the probability distribution of quadratic functional values on Ornstein-Uhlenbeck process trajectories.
Yu. P. Virchenko, A.S. Mazmanishvili 48

On an auxiliary problem of nonlinear diffusion in slightly compressible viscous fluid.
Sv. A. Gritsenko , R.N. Zimin 71

Additive problems with given numbers.
S.A. Gritsenko , N.N. Motkina 83

Solvability of coefficient inverse problems for some equations of Sobolev type.
A.I. Kozhanov 88

On a transformation of multiple Laurent series.
A.P. Lyapin 99

A derivation of equations for filtration of immiscible liquid in immiscible elastic skeleton: the case of one -velocity continuum.
L.F. Maslakova, A.M. Meirmanov 109

On the slits which touch the discriminant set of algebraic equation.
E.N. Mikhalkin 119

On The Dirichlet and Hilbert type problems for second and third order linear elliptic systems with interior supersingular point.
A.B. Rasulov 127

On Solution to the Problem of Unitary Generalization to the Sonine-Poisson Transmutations.
S.M. Sitnik 135

About summation of function $\tau_k(n)$ on numbers lying in arithmetical progression.
M.V. Shevtsova 154

Information about Authors. 170

Information for Authors. 172

Dummy layout by M.N Beknazarov
e-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Passed for printing 30.03.2010
Format 60×84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 20,22
Circulation 1000 copies
Order 53

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue – 81631,
In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at
Belgorod State University Publishing House
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

ВВЕДЕНИЕ

25 октября 2009 г. в БелГУ состоялась вторая сессия Российско-Китайского симпозиума «Комплексный анализ и его приложения. Первая сессия прошла в Москве в Институте проблем управления РАН с 21 по 24 октября 2009 г. Эти сессии были организованы Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Национальным фондом естественных наук Китая (НФЕК) в рамках совместного научного проекта «Комплексный анализ и его приложения» при поддержке ИПУ РАН и БелГУ.
В организационный комитет сессии вошли А. П. Солдатов (Белгород, Россия) председатель, Ч.-Ч. Янг (Гонконг, КНР), почетный председатель, А. Г. Александров (Москва, Россия), П.Ху (Шандонг, КНР).

Сессия была посвящена комплексному анализу и его приложениям в теории дифференциальных уравнений, динамических систем, в топологии и геометрии, в теории функций и пр. Целью симпозиума явилось обсуждение наиболее актуальных проблем комплексного анализа и его приложений, выявление новых перспектив развития научных исследований, а также возможностей для совместных научных исследований.

В состав иностранных участников конференции вошли такие крупные математики, как проф. П.Ху (Hu Peichu – КНР), проф. Ч.Ч. Янг (Chung Chun Yang - Гонконг), проф. Ванг (Wang Jian Ping – КНР), проф. Ксю (Jun Feng Xu - КНР), проф Киан Т. (Tao Qian – Австралия) , проф. Ш. Таджима (Sh. Tajima – Япония) и др. С обзорным докладом выступил действительный член польской АН, проф. Б. Боярский. В географии научных докладов представлены также Харьков и Донецк (Украина), Алма-Ата (Казахстан), Ереван (Армения).

В рамках научной программы с российской стороны приняли участие известные специалисты в области комплексного анализа и дифференциальных уравнений из многих научных центров страны, включая Москву, Санкт-Петербург, Новосибирск, Челябинск, Уфу, Красноярск и университеты центрального региона. В частности, от Московского государственного университета выступили с докладами профессора В.Н. Чубариков (декан механико-математического факультета) и Е.В. Радкевич, А.В. Боровских (кафедра дифференциальных уравнений), Вычислительный центр им. Дородницына РАН представлен проф. В.И. Власовым, приняли также участие проф. А.И. Назаров (Санкт-Петербургский госуниверситет) и проф. А.И. Кожанов (Новосибирский госуниверситет). В работе симпозиума широкое участие приняли ведущие математики Белгородского госуниверситета – проф. А.П. Солдатов, проф.А.М. Мейрманов, проф. О.М. Пенкин, проф. А.В. Глушак, проф. С.А. Гриценко и др. Труды симпозиума представлены в нескольких номерах журнала «Научные ведомости Белгородского государственного университета», включая настоящий выпуск.

УДК 517.9

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГЛАДКОМ КОНТУРЕ

Е.А. Абаполова,[1)] А.П. Солдатов[2)]

[1)]Старооскольский филиал Белгородского государственного университета,
микр-н. Солнечный, 19, г. Старый Оскол, 309502, Россия, e-mail: Abapolova@mail.ru

[2)] Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучаются вопросы фредгольмовой разрешимости классических сингулярных уравнений с ядром Коши на гладком контуре Γ в пространствах Гельдера $C^{\mu}(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Рассмотрен также обобщенный оператор Коши с матричным ядром, играющий важную роль в приложениях.

Ключевые слова: сингулярные интегралы, фредгольмова разрешимость, гладкость решения.

1 Фредгольмова разрешимость

Напомним [1, 2] элементы классической теории сингулярных интегральных уравнений

$$c(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1}$$

с ядром Коши на ориентируемом гладком контуре Γ. Здесь комплексные функции $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$ удовлетворяют условию Гельдера (кратко: условию H) и решение ищется в аналогичном классе. В дальнейшем функции этого типа называем также H—непрерывными.

Хорошо известно, что сингулярный оператор

$$[S(k)\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2}$$

инвариантен в классе H—непрерывных функций. Более того, если функция $\varphi(u,t)$ зависит от параметра u, заданном на некотором множестве E евклидового пространства, и непрерывна по Гельдеру на $E\times\Gamma$, то функция $\psi(u,t_0)$, определяемая сингулярным интегралом

$$\psi(u,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(u,t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

обладает этим же свойством. В частности, по отношению к $E=\Gamma$ и $\varphi(t_0,t) = k(t_0,t)\varphi(t)$ правую часть (2) можно записать в форме $\psi(t_0,t_0)$, что и приводит к инвариантности оператора $S(k)$ в классе H.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 07-01-00299) и РФФИ-ГФЕН (Государственный фонд естественных наук Китая) 08-01-92208-ГФЕН

Если $k(t,t)\equiv 0$, то в силу условия H функция

$$\frac{k(t_0,t)}{t-t_0}=\frac{k(t_0,t)-k(t_0,t_0)}{t-t_0}$$

имеет слабую особенность при $t\to t_0$ и (1) переходит в уравнение Фредгольма. Удобно с самого начала охватить векторный случай, когда φ и f являются $l-$вектор—функциями, а "коэффициенты"c и k уравнения (1) представляют собой $l\times l-$матрицы—функции. Уравнение (1) часто записывают в операторной форме $N\varphi=f$ с $N=c+S(k)$, где c рассматривается как оператор умножения $\varphi\to c\varphi$. Это уравнение (и отвечающий ему оператор N) относят к нормальному типу, если матрицы—функции $c(t)\pm k(t,t)$ обратимы на Γ, т.е. $\det[c(t)\pm k(t,t)]\neq 0$, $t\in\Gamma$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_\Gamma\varphi(t)\psi(t)dt, \tag{3}$$

понимая под $\varphi(t)\psi(t)$ скалярное произведение $\varphi_1\psi_1+\ldots+\varphi_l\psi_l$ двух $l-$векторов. По отношению к этой форме оператор

$$N'=c^\top-S(k^\top), \tag{4}$$

где "$\top$"означает символ матричного транспонирования, называется союзным к N. Свойство союзности заключается в тождестве

$$\langle N\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,N'\psi\rangle, \tag{5}$$

справедливом для всех H—непрерывных функций φ и ψ. Заметим, что оператор N' принадлежит к нормальному типу одновременно с N.

Основные результаты фредгольмовой разрешимости уравнения (1) в классе H — непрерывных функций можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть функции $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$ удовлетворяют условию H и оператор $N=c+S(k)$ принадлежит к нормальному типу. Тогда справедливы следующие альтернативы Фредгольма.*

(i) Однородные уравнения $N\varphi=0$ и $N'\psi=0$ имеют конечное число линейно независимых решений, соответственно, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ и $\psi_1,\ldots,\psi_m$;

(ii) неоднородное уравнение $N\varphi=f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle f_j,\psi_j\rangle=0, 1\le j\le m$;

(iii) разность $æ=n-m$ дается формулой

$$æ=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(c(t)-k(t,t))}{\det(c(t)+k(t,t))}\right]_\Gamma, \tag{6}$$

где $[\quad]_\Gamma$ означает приращение непрерывной ветви логарифма в соответствии с заданной ориентацией контура.

До сих пор речь шла о комплексных вектор—функциях. В общем случае оператор N не инвариантен в классе вещественных функций. Нетрудно описать критерий этой инвариантности: он заключается в равенстве $\overline{N\varphi}=N\overline{\varphi}$, справедливом для любой комплексной функции φ. В этой связи удобно с N связать оператор $\bar N$ по формуле

$$\bar N\varphi=\overline{N\overline{\varphi}}, \tag{7}$$

где черта справа означает комплексное сопряжение. Тогда свойство инвариантности N в классе вещественных функций можно выразить равенством $\bar{N} = N$.

Рассмотрим действие операции (7) на оператор $S(k)$. Обозначим $e(t) \in \mathbb{C}$ единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t, направленный в соответствии с ориентацией этого контура. Тогда комплексный дифференциал $dt = e(t)|dt|$, где $|dt|$ означает элемент длины дуги. Подставляя это выражение в (1), в соответствии с (7) приходим к равенству

$$\overline{S(k)} = S(-\bar{k}\omega), \tag{8}$$

где положено

$$\omega(t_0, t) = \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0}\,\frac{\overline{e(t)}}{e(t)},\ t \neq t_0, \quad \omega(t_0, t_0) = 1.$$

нетрудно видеть, что для гладкого контура Γ так определенная функция ω непрерывна на $\Gamma \times \Gamma$. Следующая лемма показывает, что принадлежность ее классу H всегда имеет место для ляпуновского контура. Напомним, что контур Γ ляпуновский, если функция $e(t)$ удовлетворяет условию H.

Лемма 1. *Пусть функция $Q(\xi)$ комплексной переменной $\xi \neq 0$ непрерывно дифференцируема, четна и однородна степени нуль. Тогда для любого ляпуновского контура Γ заданная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $k(t_0, t) = Q(t_0 - t); t_0 \neq t$, доопределенная значением $Q[e(t)]$ для $t = t_0$, удовлетворяет условию H.*

Доказательство. Достаточно убедится, что функция k удовлетворяет условию H на $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ для каждой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. По условию найдется такое параметрическое уравнение $t = \gamma(s), 0 \leq s \leq 1$, этой дуги, что производная $\gamma'(s)$ всюду отлична от нуля и H—непрерывна на $[0, 1]$. В силу однородности Q можем записать

$$k[\gamma(s_0), \gamma(s)] = Q[q(s_0, s)], \quad q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0}.$$

Поэтому остается убедиться, что функция q удовлетворяет условию H на $[0, 1] \times [0, 1]$. Поскольку

$$q(s_0, s) = \int_0^1 \gamma'[su + s_0(1 - u)]du,$$

это свойство очевидно.

Согласно этой лемме для ляпуновского контура Γ функция ω в (8) принадлежит классу $H(\Gamma \times \Gamma)$ и,следовательно, операция (7) не выводит из класса операторов (1). Поэтому для любого оператора N вида (1) оператор $M = N + \bar{N}$ обладает свойством $M = \bar{M}$, обеспечивающем его инвариантность в классе вещественных вектор- функций. Однако союзный оператор M' уже не обладает этим свойством. В этой связи удобнее пользоваться билинейной формой

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)|dt|, \tag{9}$$

связанной с (3) соотношением $\langle\varphi, \psi\rangle = (\varphi, e\psi)$. В частности, оператор $N^\nabla = eN'e^{-1}$ будет союзным к N относительно формы (9), т.е. справедливо аналогичное (5) тождество $(N\varphi, \psi) = (\varphi, N^\nabla\psi)$. Утверждается, что операции $N \to N^\nabla$ и $N \to \bar{N}$ коммутируют друг с другом, т.е. $\overline{N^\nabla} = (\bar{N})^\nabla$. В самом деле, по определению союзного оператора

$$\overline{(N\varphi, \psi)} = \overline{(\varphi, N^\nabla\psi)} = (\bar{\varphi}, \overline{N^\nabla}\bar{\psi}).$$

С другой стороны,

$$\overline{(N\varphi,\psi)} = (\bar{N}\bar{\varphi},\bar{\psi}) = (\bar{\varphi},(\bar{N})^{\nabla}\bar{\psi}),$$

что и доказывает равенство $\overline{N^{\nabla}} = (\bar{N})^{\nabla}$. В частности, оператор $(N+\bar{N})^{\nabla} = N^{\nabla} + \overline{N^{\nabla}}$ имеет тот же вид, что и $N+\bar{N}$.

Теорема 2. *Пусть контур* Γ *ляпуновский и оператор* $M = N + \bar{N}$ *принадлежит к нормальному типу. Тогда по отношению к* M *и* M^{∇} *утверждения* (i)*–*(iii) *теоремы 1 справедливы в классе вещественных* l*–вектор–функций.*

Доказательство. Утверждения (i)—(iii) сохраняют свою силу и по отношению к паре M, M^{∇}. Пусть X есть конечномерное пространство $\ker N = \{\varphi | N\varphi = 0\}$ размерности n и $X_{\mathbb{R}}$ его подпространство (над полем $\mathbb{R}$) вещественных функций. Соотношение $\overline{M\varphi} = M\overline{\varphi}$ означает, что пространство X инвариантно относительно операции $\varphi \to \overline{\varphi}$ комплексного сопряжения. Над полем $\mathbb{R}$ это пространство имеет размерность $2n$ и имеет место разложение в прямую сумму $X = X_{\mathbb{R}} \oplus iX_{\mathbb{R}}$. Следовательно, в X можно выбрать базис $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ из вещественных вектор—функций.

Поскольку M^{∇} также обладает свойством $M^{\nabla} = \overline{M^{\nabla}}$, в пространстве $Y = \ker M^{\nabla}$ можно также выбрать базис из вещественных функций $\psi_1,\ldots,\psi_m$. Тем самым утверждение (i) теоремы 1 для M установлено по отношению к вещественным функциям.

Рассмотрим далее неоднородное уравнение $M\varphi = f$ с вещественной правой частью. Если $(f,\psi_j) = 0, j = 1,\ldots,m$, то в силу теоремы 1 оно имеет комплексное решение φ^1. Но тогда вместе с ним его решением будет и вещественная функция $\varphi = (\varphi^1 + \overline{\varphi^1})/2$, поскольку $M\varphi = (M\varphi^1 + \overline{M\varphi^1})/2 = f$. Следовательно, имеет место и предложение (ii) теоремы 1.

2 Регуляризация уравнения

Если функция $k(t_0,t)$ обращается в нуль при $t = t_0$, то в силу ее H—непрерывности ядро $k(t_0,t)/(t-t_0)$ имеет слабую особенность и (1) является уравнением Фредгольма второго рода. В этом случае принадлежность уравнения (1) к нормальному типу сводится к обратимости матрицы—функции c и величина æ в (6) равна нулю. Соответственно утверждения (i)—(iii) теоремы 1 представляют собой классические альтернативы Фредгольма. В общем случае доказательство этих утверждений сводится к рассмотренному выше случаю путем регуляризации уравнения (1), которое и рассмотрим в настоящем разделе.

С каждой парой функций $k_1(t_0,t)$, $k_2(t_0,t) \in H(\Gamma\times\Gamma)$ свяжем функцию $(k_1 * k_2)(t_0,t)$ по формуле

$$(k_1 * k_2)(t_1,t) = \frac{(t-t_1)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k_1(t_1,t_0)k_2(t_0,t)}{(t_0-t_1)(t-t_0)}dt_0,\ t_1 \neq t; \quad (k_1 * k_2)(t,t) = 0. \tag{10}$$

При $t_1 \neq t$ интеграл здесь сингулярный с особыми точками t_1 и t. Поскольку

$$\frac{1}{(t_0-t_1)(t-t_0)} = \frac{1}{t-t_1}\left[\frac{1}{t_0-t} - \frac{1}{t_0-t_1}\right],$$

равенство (10) можем записать в форме

$$(k_1 * k_2)(t_1,t) = q(t_1,t,t) - q(t_1,t,t_1), \quad q(t_1,t,t_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k_1(t_1,t_0)k_2(t_0,t)}{t_0-t_2}dt_0. \tag{11}$$

Как отмечено в начале п. 1, функция q, определяемая сингулярным интегралом с параметром $u = (t_1, t) \in \Gamma\times\Gamma$, принадлежит классу $H(\Gamma\times\Gamma\times\Gamma)$ и, следовательно, $k_1 * k_2 \in H(\Gamma\times\Gamma)$.

Регуляризация уравнения (1) основана на следующей формуле перестановки Пуанкаре-Бертрана [1] сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k_1(t_1,t_0)}{t_0-t_1}dt_0\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k_2(t_0,t)}{t-t_0}dt\right] = k_1(t_1,t_1)k_2(t_1,t_1) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(k_1*k_2)(t_1,t)}{t-t_1}dt.$$

В обозначениях (2) это равенство можем переписать в операторной форме:

$$S(k_1)S(k_2) = a + S(k_1 * k_2), \quad a(t) = k_1(t,t)k_2(t,t). \tag{12}$$

Обозначим $\mathcal{K}$ класс всех операторов $N = c + S(k)$ с H—непрерывными функциями $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$. Совокупность операторов $S(k) \in \mathcal{K}$, для которых $k(t,t) \equiv 0$, обозначим $\mathcal{K}_0$. В силу (11) оператор $S(k_1 * k_2)$ в правой части (12) принадлежит $\mathcal{K}_0$, так что

$$NN_0, N_0N \in \mathcal{K}_0 \quad \text{при} \quad N \in \mathcal{K},\ N_0 \in \mathcal{K}_0. \tag{13}$$

Удобно для оператора $S(k)$ с $k = 1$ принять специальное обозначение $S = S(1)$. Таким образом,

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Полагая $k_1 = k_2 = 1$ в формуле (12), с учетом (11) получим:

$$(S^2\varphi)(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{h(t)-h(t_0}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad h(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}. \tag{14}$$

Заметим, что функция h постоянная на связных компонентах контура Γ.

Полагая $2P^\pm = 1 \pm S$, общий элемент $N \in \mathcal{K}$ можем записать в форме

$$N = aP^+ + bP^- + N_0, \quad N_0 \in \mathcal{K}_0. \tag{15}$$

В обозначениях (1) роль коэффициентов a и b здесь играют, соответственно, $c(t) + k(t,t)$ и $c(t) - k(t,t)$. Таким образом, принадлежность N к нормальному типу заключается в обратимости коэффициентов a и b, а формула (6) для оператора (15) переходит в

$$æ(N) = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det b}{\det a}\right]_\Gamma. \tag{16}$$

Для любых функций a_j, b_j, $j = 1,2$, справедливо соотношение

$$(a_1P^+ + b_1P^-)(a_2P^+ + b_2P^-) - (a_1a_2P^+ + b_1b_2P^-) \in \mathcal{K}_0. \tag{17}$$

В самом деле, очевидно, $aS - Sa \in \mathcal{K}_0$. Из (14) также видно, что $S^2 - 1 \in \mathcal{K}_0$. Следовательно, операторы $(P^\pm)^2 - P^\pm$ и $P^+P^- = P^-P^+$ принадлежат $\mathcal{K}_0$, что совместно с (13) приводит к справедливости (17).

Соотношения (17) составляют по существу процедуру регуляризации уравнения $N\varphi = f$. Если оператор N в (15) принадлежит к нормальному типу и $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$, то $RN = 1 + K$ с некоторым $K \in \mathcal{K}_0$. Решение φ уравнения $N\varphi = f$ является и решением уравнения Фредгольма $\varphi + K\varphi = Rf$. Однако обратное, вообще говоря, не верно, т.е. данная регуляризация не равносильна. Вопрос об условиях, обеспечивающих равносильную регуляризацию, требует отдельного рассмотрения и подробно изучался многими авторами [1, 2].

Если контур Γ ляпуновский, то функция ω в соотношении (8) принадлежит классу $H(\Gamma\times\Gamma)$ и применительно к S это соотношение переходит в

$$S + \bar{S} \in \mathcal{K}_0, \tag{18}$$

где учтено, что $\omega(t,t) = 1$. В частности, аналогично (15) можем записать

$$\bar{N} = \bar{b}P^+ + \bar{a}P^- + N_1, \quad N_1 \in \mathcal{K}_0,$$

и, следовательно, для оператора $M = N + \bar{N}$ имеем разложение

$$M = (a+\bar{b})P^+ + (b+\bar{a})P^- + M_0, \quad M_0 \in \mathcal{K}_0.$$

Поэтому нормальный тип оператора M определяется обратимостью $a+\bar{b}$ и формула (16) для него переходит в

$$æ(M) = \frac{1}{\pi i}[\ln\det(a+\bar{b})]_\Gamma.$$

3 Уравнение в классе $C^\mu(\Gamma)$

. Предыдущие рассмотрения нетрудно перенести на случай, когда решения и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условию Гельдера с фиксированным показателем $0<\mu<1$. Класс таких функций, заданных на некотором множестве E, обозначим $C^\mu(E)$. Относительно нормы

$$|\varphi|_\mu = \sup_{t\in E}|\varphi(t)| + \sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu} \tag{19}$$

это пространство банахово. Соответственно класс всех непрерывных и ограниченных функций обозначаем $C(E)$ с $\sup$ −нормой, определяемой первым слагаемым в правой части (17). Заметим, что пространство $C^\nu(E)$ вложено в $C^\mu(E)$ при $\mu<\nu$.

Определение (19) используем и для вектор—функций $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_l)$, понимая под $|\varphi(t)|$ какую-либо фиксированную норму в $\mathbb{C}^l$. Например, можем положить $|\xi| = \max_i|\xi_i|, \xi\in\mathbb{C}^l$. Аналогичным образом норма (19) определяется и для матриц—функций.

Объединение классов $C^{\mu+\varepsilon}$ по $\varepsilon>0$ обозначим $C^{\mu+0}$. В этом смысле класс H совпадает с обьединением $C^{+0} = \cup_{\varepsilon>0}C^\varepsilon$. Удобно писать, что контур $\Gamma\in C^{1,\mu+0}$, если единичный вектор $e(t)$ как функция на Γ принадлежит классу $C^{\mu+0}(\Gamma)$. В этом случае для любой дуги $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ найдется такая ее параметризация $t=\gamma(s),\ 0\le s\le 1$, что $\gamma'(s)\in C^{\mu+0}[0,1]$. Как видно из доказательства леммы 1, для рассматриваемых контуров функция $Q(t-t_0)\in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$.

Аналогично п.2 обозначим $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ класс операторов $c+S(k)$, где $c\in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и $k(t_0,t)\in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$. Соответственно $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ состоит из операторов $S(k)$, для которых $k\in C^{\mu+0}$ и $k(t,t)\equiv 0$.

Приведенные в [1] оценки сингулярных интегралов показывают, что для $\varphi(t)\in C^\mu(\Gamma)$ и $k(t_0,t)\in C^\nu(\Gamma\times\Gamma),\ 0<\mu<\nu<1$, функция $S(k)\varphi\in C^\mu(\Gamma)$, причем ее норма допускает оценку

$$|S(k)\varphi|_\mu \le C|k|_\nu|\varphi|_\mu,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ и k. Таким образом, линейные операторы $N \in \mathcal{K}(C^{\mu+0})$ ограничены в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Аналогичные оценки можно провести и для интегралов, зависящих от параметра. В частности, если $k_j(t_0, t) \in C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma), j = 1, 2,$ то этим свойством обладает и функция $k_1 * k_2$ в (11). Поэтому соотношения (13), (16) справедливы и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Из этих же соображений для $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ функция ω принадлежит $C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$, так что в этом случае (18) имеет место по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$.

Следующая лемма, установленная в [3], показывает, что операторы $S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ компактны в пространстве $C^\mu(\Gamma)$.

Лемма 2. *Пусть $k \in C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$ и $k(t,t) \equiv 0$. Тогда оператор $S(k)$ ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$.*

С помощью этой леммы теоремы 1 и 2 легко распространить на $C^\mu(\Gamma)$.

Теорема 3. *Пусть оператор $N \in \mathcal{K}(C^{\mu+0})$ принадлежит к нормальному типу. Тогда любое решение уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$ также принадлежит $C^\mu(\Gamma)$. При дополнительном предположении $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к уравнению нормального типа $M\varphi = f$ теоремы 2.*

Доказательство. Запишем N в форме (15) с $a, b \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и $N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ и рассмотрим оператор $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$. Как отмечено выше, (16) имеет место и по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ т.е. $RN = 1 + K$, $K \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Таким образом, если H- непрерывная функция φ служит решением уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$, то $\varphi + K\varphi = f_1$, с $f_1 = Rf \in C^\mu(\Gamma)$. На основании леммы 2 отсюда и $\varphi = f_1 - K\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Пусть далее $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$. Как отмечено выше, тогда (18) имеет место по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ и к оператору M можно применить предыдущие рассуждения.

Напомним [4], что ограниченный в банаховом пространстве X оператор N фредгольмов, если его ядро $\ker N = \{x \in X,\ Nx = 0\}$ конечномерно, образ $\operatorname{im} N$ замкнут и фактор-пространство $X/\operatorname{im} N$ также конечномерно. Размерности этих пространств обозначают, соответственно, $\dim N$ и $\operatorname{codim} N$, а их разность $\dim N - \operatorname{codim} N$ называется индексом $\operatorname{ind} N$ фредгольмового оператора N. Очевидно, конечномерность пространства $X/\operatorname{im} N$ равносильна существованию в X такого конечномерного подпространства Z той же размерности $\operatorname{codim} N$, что $X = Z \oplus \operatorname{im} N$.

Убедимся, что в условиях теоремы 3 оператор N фредгольмов в банаховом пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и его индекс $\operatorname{ind} N = æ(N)$. В самом деле, из этой теоремы следует, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m$, фигурирующие в теореме 1, принадлежат $C^\mu(\Gamma)$ и условия ортогональности $\langle f, \psi_j \rangle = 0$, $1 \le j \le m$, необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $N\varphi = f$. В частности, образ $\operatorname{im} N$ есть замкнутое подпространство $C^\mu(\Gamma)$. Рассмотрим линейное отображение $L : C^\mu(\Gamma) \to \mathbb{C}^m$ по формуле $(Lf)_i = \langle f, \psi_i \rangle$, $1 \le i \le m$. Образ $\operatorname{im} L$ этого отображения совпадает со всем $\mathbb{C}^m$. В противном случае найдется такой вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{C}^m$, что $\eta_1(Lf)_1 + \cdots + \eta_m(Lf)_m = 0$ для всех $f \in C^\mu$. По отношению к $\psi = \eta_1\psi_1 + \cdots + \eta_m\psi_m$ это означает, что $\langle f, \psi \rangle = 0$ для всех $f \in C^\mu$, что возможно только для $\psi = 0$. Но тогда $\eta = 0$, что невозможно.

Итак, $\operatorname{im} L = \mathbb{C}^m$ и, следовательно, для базисных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_m = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^m$ найдутся такие $f_1, \ldots, f_m \in C^\mu(\Gamma)$, что $Lf_i = e_i$,$1 \le i \le m$, или, что равносильно, $\langle f_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ означает символ Кронекера. Очевидно, система функций $f_1, \ldots, f_m$ линейно независима, она называется биортогональной к системе $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Нетрудно видеть, что подпространство Z, натянутое на функции биортогональной системы, дополняет $\operatorname{im} N$ до прямой суммы $C^\mu(\Gamma) = Z \oplus \operatorname{im} N$. В частности, $\operatorname{codim} N = m$. Таким образом, оператор N фредгольмов и его индекс $\mathrm{ind} N = n - m = æ(N)$.

4 Гладкость решений

Сингулярные уравнения (1) можно рассматривать и для непрерывно-дифференцируемых функций. Введем в классе $C^1(\Gamma)$ операцию дифференцирования

$$(D\varphi)(t) = \lim_{s\to t,\ s\in\Gamma} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}. \tag{20}$$

По определению класс $C^{1,\mu}(\Gamma)$ состоит из всех функций φ, для которых $\varphi, D\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Аналогичный смысл имеет класс и $C^{1,\mu+0}$. Относительно нормы

$$|\varphi|_{1,\mu} = |\varphi|_\mu + |D\varphi|_\mu$$

пространство $C^{1,\mu}(\Gamma)$ банахово и, очевидно, оператор вложения $C^{1,\mu} \subseteq C^\mu$ компактен.

Операции частного дифференцирования $D_1 k$ и $D_2 k$ можно можно ввести по отношению к функции $k(t_0, t) \in C^1(\Gamma\times\Gamma)$ двух переменных, полагая

$$(D_1 k)(t_0,t) = \lim_{s_0\to t_0, s_0\in\Gamma} \frac{k(s_0,t)-k(t_0,t)}{s_0-t_0}$$

и действуя аналогично по второй переменной. Заметим, что по отношению к функции $a(t) = k(t,t)$ одной переменной имеет место равенство

$$(Da)(t) = [(D_1+D_2)k](t,t). \tag{21}$$

Нетрудно указать достаточные условия, при выполнении которых оператор, ограниченный в $C^\mu(\Gamma)$, будет обладать аналогичным свойством по отношению к пространству $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Они заключаются в следующем: для $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ функция $N\varphi$ непрерывно дифференцируема и

$$DN\varphi = N^0 D\varphi + N^1\varphi, \tag{22}$$

где операторы N^j ограничены в C^μ и зависят только от N. Если дополнительно операторы N и N^j компактны в C^μ, то оператор N будет компактен и в $C^{1,\mu}$.

Следующая теорема показывает, что при определенных предположениях оператор $S(k)$ обладает свойством (22).

Теорема 4. *Если $k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$, то*

$$DS(k) = S(k)D + S(k^1), \quad k^1 = (D_1+D_2)k. \tag{23}$$

Доказательство проведем сначала для случая $k = 1$, когда (23) переходит в равенство

$$DS = SD. \tag{24}$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma$$

с функцией $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Хорошо известно [1], что для H—непрерывной функции φ аналитическая функция $\phi(z)$ непрерывна продолжима на Γ с обеих сторон контура и для ее односторонних предельных значений $\phi^{\pm}(t_0)$, $t_0 \in \Gamma$, справедливы формулы Сохоцкого - Племеля

$$2\phi^{\pm}(t_0) = \pm\varphi(t_0) + (S\varphi)(t_0). \tag{25}$$

Рассмотрим производную

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^2}.$$

С учетом очевидного тождества

$$\frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} = -D_t\left(\frac{1}{t-z}\right)\varphi(t) = -D_t\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right] + \frac{(D\varphi)(t)}{t-z}$$

ее можно записать в форме

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(D\varphi)(t)dt}{t-z}.$$

В частности, функция ϕ' непрерывна продолжима на Γ с обеих сторон и

$$2(\phi')^{\pm}(t_0) = \pm(D\varphi)(t_0) + (SD\varphi)(t_0).$$

Определение (20) производной на контуре Γ согласуется с дифференцированием аналитических функций. Поэтому функции $\phi^{\pm}$ непрерывно дифференцируемы и $D\phi^{\pm} = (\phi')^{\pm}$. Совместно с (25) и предыдущим равенством отсюда следует (24).

В общем случае пусть $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и

$$\psi(t_1, t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt.$$

В силу уже доказанного свойства (24) имеем:

$$(D_2\psi)(t_1,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{D_2(k\varphi)(t_1,t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D_2k)(t_1,t)\varphi(t) + k(t_1,t)(D\varphi)(t)}{t-t_0}dt. \tag{26}$$

С другой стороны, пусть $k \in C^{1,\nu}(\Gamma\times\Gamma)$ с некоторым $\mu < \nu < 1$ и последовательность точек $t_{1n} \in \Gamma$ сходится к t_1. Тогда

$$\frac{\psi(t_{1n},t_0) - \psi(t_1,t_0)}{t_{1n}-t_1} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D_1k)(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{q_n(t)\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

где

$$q_n(t) = \frac{k(t_{1n},t_0) - k(t_1,t_0)}{t_{1n}-t_1} - (D_1k)(t_1,t).$$

Нетрудно видеть, что последовательность функций q_n равномерно ограничена в $C^{\nu}(\Gamma)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$ по $\sup$ —норме. Утверждается, что $q_n \to 0$ по норме пространства $C^{\mu}(\Gamma)$.

В самом деле, обозначим $[\varphi]_\mu$ второе слагаемое в правой части (19). Заметим, что при $\mu = 0$ величина $[\varphi]_0$ представляет собой колебание функции φ на множестве E. Для $\varphi \in C^\nu(E)$ и любого $r > 0$ имеем:

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\mu} \leq \begin{cases} [\varphi]_\nu r^{\nu-\mu}, & |x-y| \leq r, \\ |\varphi]_0 r^{-\mu}, & |x-y| \geq r. \end{cases}$$

Следовательно,

$$[\varphi]_\mu \leq \max([\varphi]_\nu r^{\nu-\mu}, [\varphi]_0 r^{-\mu}).$$

Выберем r по условию $[\varphi]_\nu r^\nu = [\varphi]_0$, тогда предыдущая оценка примет вид

$$[\varphi]_\mu \leq [\varphi]_\nu^{\mu/\nu} [\varphi]_0^{1-\mu/\nu}.$$

Применительно к $\varphi =_n \in C^\nu(\Gamma)$ это неравенство означает, что $[q_n]_\mu \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, последовательность $q_n \to 0$ в $C^\mu(\Gamma)$.

С учетом ограниченности оператора S в C^μ отсюда следует, что правая часть (27) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому в пределе приходим к равенству

$$D_1\psi)(t_1, t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{D_1(k)(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt.$$

Объединяя его с (26), получим равенство

$$[(D_1 + D_2)\psi)](t_1,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k^1(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_1,t)}{t-t_0}(D\varphi)(t)dt,$$

которое совместно с (26) при $t_1 = t_0$ переходит в (23).

Заметим, что если $k(t,t) \equiv 0$, то в силу (21) аналогичным свойством обладает и функций k^1.

Обозначим $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ класс всех операторов $N = S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, обладающих свойством (22) с некотороми $N^0, N^1 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Из этого определения, в частности, вытекает, что операторы $N \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ компактны в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Согласно теореме 4 операторы $S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, для которых $k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$, принадлежат этому классу. Однако как показывает следующая лемма, усиливающая соотношение (18), данному классу принадлежат и более общие операторы.

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ *, то* $S + \bar{S} \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Доказательство. Применительно к D операция (7) дает оператор дифференцирования

$$(\bar{D}\varphi)(t) = \lim_{s\to t,\, s\in\Gamma} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{\bar{s}-\bar{t}}.$$

Поскольку

$$\lim_{s\to t,\, s\in\Gamma} \frac{s-t}{\bar{s}-\bar{t}} = \frac{e(t)}{\overline{\overline{e(t)}}},$$

эти операции связаны соотношением

$$\bar{D}\varphi = dD\varphi, \quad d = e/\bar{e}. \tag{28}$$

Поскольку применение (7) к (24) дает равенство $\bar{D}\bar{S} = \bar{S}\bar{D}$, отсюда $D\bar{S} = d^{-1}\bar{S}dD$ и, следовательно, $D(S+\bar{S}) = (S + d^{-1}\bar{S}d)D$. По условию функция $d \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и, значит, $S - d^{-1}Sd \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Совместно с (18) отсюда $D(S+\bar{S}) = N_0 D, \quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, что завершает доказательство леммы.

Обозначим $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ класс операторов вида (15), где $a, b \in C^{1,\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ и $N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Лемма 4. *Соотношения (13), (17) справедливы и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.*

Доказательство. Если операторы N_j, $j = 1, 2$, обладают свойством (22) с некоторыми N_j^k, $k = 0, 1$, то это верно и по отношению к их произведению N_1N_2. В самом деле,

$$DN_1N_2 = (N_1^0 D + N_1^1)N_2 = N_1^0 N_2^0 D + N_1^1 N_2 + N_1^0 N_2^1.$$

Совместно с (13) отсюда следует справедливость аналогичного свойства и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Если $a \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, то в силу теоремы 4 оператор $aS - Sa \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$. С учетом (14) аналогичное включение справедливо и для оператора $S^2 - 1$. В свою очередь отсюда вытекает соотношение (17) для рассматриваемых классов.

Сформулируем теперь аналог теоремы 3 для непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 5. *Пусть оператор $N \in \mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ принадлежит к нормальному типу. Тогда любое решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ также принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$. При дополнительном предположении $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к уравнению нормального типа $M\varphi = f$ теоремы 2.*

Доказательство. Запишем N в форме (15) с $a, b \in C^{1,\mu+0}(\Gamma), \quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ и положим $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$. Тогда на основании леммы 4 оператор $RN = 1 + K$ с $K \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$. Поэтому, заменяя f на Rf, утверждение достаточно установить по отношению к уравнению $N\varphi = f$ с $N = 1 + K$.

Оператор K компактен как в $C^{\mu}(\Gamma)$, так и в $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Последний оператор, рассматриваемый в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, обозначим K^1. По теореме Рисса [5] операторы $N = 1+K$ и $N^1 = 1+K^1$ фредгольмовы и их индексы равны нулю. Это же верно и по отношению к союзному оператору $N' = 1 + K'$. В частности, в обозначениях теоремы 1 числа $n = \dim N$ и $m = \dim N' = \operatorname{codim} N$ совпадают.

Поскольку пространство $\ker N^1$ содержится в $\ker N$, его размерность $n^1 = \dim N^1 \le n$. Рассуждения, приведенные в конце п. 3, показывают, что систему функций $f_1, \ldots, f_n$, биортогональную к базису $\psi_1, \ldots, \psi_n$ пространства $\ker N'$, можно выбрать и в $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Так как образ $\operatorname{im} N^1$ содержится в $\operatorname{im} N$, пространство Z, натянутое на векторы $f_1, \ldots, f_n$, не пересекается с Z, так что $n^1 = \operatorname{codim} N^1 \ge n$.

Таким образом, $\ker N^1 = \ker N$ и $C^{1,\mu} = Z \oplus \operatorname{im} N^1$. В частности, условия ортогональности $\langle f, \psi_j\rangle = 0$, $1 \le j \le m$, необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в классе $C^{1,\mu}(\Gamma)$, поэтому его решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Вторая часть теоремы с учетом леммы 3 является следствием первой ее части.

Теорема 5 показывает, что оператор N фредгольмов в банаховом пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ и его индекс $\operatorname{ind} N = æ(N)$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к оператору M.

5 Обобщенный оператор Коши

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ обратима и ее собственные значения не лежат на вещественной оси. Тогда для любого ненулевого комплексного числа $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, матрица

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J \tag{29}$$

обратима. Здесь и ниже 1 означает единичную $l\times l$-матрицу. Аналогичную запись используем и для матричного дифференциала $dz_J = dx \cdot 1 + dy \cdot J$ на контуре Γ. В терминах касательного вектора $e(t)$ можно записать $dt_J = e_J(t)|dt|$.

Естественным обобщением S служит сингулярный оператор

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{30}$$

который, очевидно, можем переписать в форме

$$S_J = S(k), \quad k(t_0, t) = (t-t_0)(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) e^{-1}(t).$$

Если $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, то в силу леммы 1 функция $k(t_0,t) \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma),\ \ k(t,t) \equiv 1$, так что

$$S_J - S \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0}) \tag{31}$$

Поэтому оператор S в представлении (15) можем заменить на S_J. В действительности аналогично лемме 5 это соотношение можно усилить.

Лемма 5. *Если $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, то $S_J - S \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.*

Доказательство. Введем на Γ операцию дифференцирования по формуле

$$(D_J\varphi)(t_0) = \lim_{t\to t_0, t\in\Gamma} (t-t_0)_J^{-1}[\varphi(t) - \varphi(t_0)]. \tag{32}$$

Поскольку

$$\lim_{s\to t,\, s\in\Gamma} (s-t)(s-t)_J^{-1} = e(t) e_J^{-1}(t),$$

эта операция связана с (18) равенством

$$D_J\varphi = dD\varphi, \quad d(t) = e_J^{-1}(t) e(t) \in C^{\mu+0}(\Gamma). \tag{33}$$

Утверждается, что аналогично (22) имеет место равенство

$$D_J S_J = S_J D_J. \tag{34}$$

В самом деле, как и при доказательстве леммы 3 рассмотрим вне Γ вектор—функцию

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t). \tag{35}$$

В предположении H-непрерывности φ эта функция непрерывно продолжима на Γ с обеих сторон контура и справедлива формула Сохоцкого-Племеля

$$2\phi^{\pm}(t_0) = \pm\sigma\varphi(t_0) + (S_J\varphi)(t_0), \tag{36}$$

где матрица σ зависит только от J и обладает свойством $\sigma^2 = 1$.

В случае, когда собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости, этот факт был установлен в [6] с $\sigma = 1$. Если собственные значения J лежат в нижней полуплоскости, то это утверждение справедливо с $\sigma = -1$. Для доказательства достаточно заметить, что в обозначениях (29) комплексно сопряженная матрица $\overline{z_J} = z_{\overline{J}}$ и, значит,

$$\overline{\phi(z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{\overline{J}} dt_{\overline{J}} \overline{\varphi(t)}.$$

Поэтому на основании предыдущего утверждения $2\overline{\phi^{\pm}} = \mp\overline{\varphi} + S_{\overline{J}}\overline{\varphi}$. Переходя к комплексно сопряженному равенству, получим (36) с $\sigma = -1$.

В общем случае выберем матрицу $B \in \mathbb{C}^{l\times l}$ так, чтобы матрица $J^0 = B^{-1}JB$ была блочно диагональна: $J^0 = \mathrm{diag}(J^0_+, J^0_-)$, где собственные значения матрицы $J^0_+(J^0_-)$ лежат в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда согласно (35)

$$B^{-1}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{J^0} dt_{J^0} B^{-1}\varphi(t).$$

В результате приходим к справедливости (36) с матрицей $\sigma = B\ \mathrm{diag}(1, -1)B^{-1}$.

Функция $\phi(z)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ и ее частные производные выражаются по формулам

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi', \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = J\phi', \quad \phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-2}_J dt_j\varphi(t).$$

В частности, в каждой точке $z_0 \notin \Gamma$ существует предел

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{-1}_J[\phi(z)-\phi(z_0)] = \phi'(z_0),$$

так что в соответствии с определением (32)

$$(t-z)^{-2}_J\varphi(t) = -D_{J,t}(t-z)^{-1}_J(D\varphi)(t).$$

В результате приходим к равенству

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dt_J(t-z)^{-1}_J(D_J\varphi)(t).$$

Далее для завершения доказательства (34) остается повторить соответствующие рассуждения теоремы 4.

С учетом (33) равенство (34) можем переписать в форме $DS_J = (d^{-1}S_Jd)D$, откуда $D(S - S_J) = (S - d^{-1}S_Jd)D$. В силу (30) оператор $S - d^{-1}S_Jd$ принадлежит $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, что в соответствии с определением класса $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ завершает доказательство леммы.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение $\mathrm{Re}\ a(\varphi + S_J\varphi) = f$ в классе $C^\mu(\Gamma)$ вещественных $l-$вектор—функций, играющее важную роль в приложениях [7]. В силу леммы 5 оператор M этого уравнения можно представить в форме

$$2M = a(1+S_J) + \overline{a}(1+\overline{S}_J) = 2(aP^+ + \overline{a}P^- + N_0), \quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0}). \tag{37}$$

Как и в случае теоремы 2 союзное уравнение целесообразно рассматривать относительно формы (9). Отметим, что оператор S_J^∇, союзный к S_J относительно этой формы, дается равенством

$$S_J^\nabla = -qS_{J^\top}q^{-1}, \quad q(t) = e_{J^\top}(t), \tag{38}$$

где, напомним, $\top$ есть символ матричного транспонирования.

В самом деле, для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^l$ имеем:

$$[(t-t_0)_J^{-1}e_J(t)\varphi(t)]\psi(t_0) = \varphi(t)[(t-t_0)_{J^\top}^{-1}q(t)\psi(t_0)].$$

Поэтому в соответствии с (30)

$$\int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1}e_J(t)\varphi(t)|dt|\right]\psi(t_0)|dt_0| =$$

$$= \int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma a(t)(t-t_0)_{J^\top}^{-1}\psi(t_0)|dt_0|\right]dt,$$

откуда следует (38).

Применяя к оператору (37) теорему 4, приходим к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть* $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ *и матрица—функция* $a \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ *обратима. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Однородные уравнения* $\mathrm{Re}\, a(1+S_J)\varphi = 0$ *и* $\mathrm{Re}\,(1-qS_{J^\top}q^{-1})a^\top\psi = 0)$ *имеют в классе* $C^{\mu+0}(\Gamma)$ *конечное число линейно независимых решений, соответственно,* $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ *и* $\psi_1,\dots,\psi_m$.

(ii) *Неоднородное уравнение* $\mathrm{Re}\, a(1+S_J)\varphi = f$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $(f,\psi_j) = 0,\ 1 \le j \le m$.

(iii) *Разность* $æ = n - m$ *дается формулой*

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det\ a]_\Gamma.$$

(iv) *Если дополнительно* $a \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, *то любое решение* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ *уравнения* $\mathrm{Re}\, a(1+S_J)\varphi = f$ *с правой частью* $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ *принадлежит* $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М., Наука, 1968.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука, 1977.
3. Солдатов А.П., Чернова О.В., Задача Римана — Гильберта для эллиптической системы первого порядка, Научные ведомости БелУ, 2010.
4. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.- М.: Мир, 1970
5. Рудин У. Функциональный анализ. М. Мир, 1975.
6. Солдатов А.П., Граничные свойства интегралов типа Коши // Дифференц.уравн. 1990. Т.26, No.1. С.131-136.

7. Абаполова Е.А., Солдатов А.П., Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде// Вестник СамГУ-естественнонаучная серия, 2007, №6 (56), С. 260-268.

TO THE THEORY OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS ON SMOOTH CONTOURS

E.A. Abapolova,[1] **A.P. Soldatov**[2]

[1] Stary Oskol Branch of Belgorod State University,
mikr-n. Solnechny, 19, Stary Oskol, 309502, Russia, e-mail: Abapolova@mail.ru

[2] Belgorod State University
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. The Fredholm solvability for singular integral equations of the classical type is considered.

Keywords: singular integrals, Fredholm solvability, smooth solutions.

УДК 517.983

К ВОПРОСУ О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Х.К. Авад, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследуется разрешимость задачи типа Коши для уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля после ее возмущения неограниченным оператором.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными, задача типа Коши, возмущение неограниченным оператором.

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ — тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, наконец, B — также линейный, замкнутый, плотно определенный, и, вообще говоря, неограниченный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Излагаемые в дальнейшем результаты примыкают к теории возмущений по Миядере генераторов полугрупп (см. [1 - 3]). Рассматривается вопрос о том, как отражается на разрешимости задачи (1), (2) добавление слагаемого, содержащего оператор B, который в некотором смысле подчинен оператору A. Будут указаны условия, при выполнении которых разрешимость задачи сохранится и после возмущения оператора A неограниченным оператором B.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим невозмущенную задачу

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0. \tag{4}$$

Работа второго автора поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

Определение 1 *Решением задачи* (3), (4) *называется непрерывная при* $t > 0$ *функция* $u(t)$ *такая, что* $I^{1-\alpha}u(t)$ *представляет собой непрерывно дифференцируемую при* $t > 0$ *функцию, функция* $u(t)$ *принимает значения в* $D(A)$ ($D(A)$ *— область определения оператора* A) *и удовлетворяет* (3), (4).

Определение 2 *Задача* (3), (4) *называется равномерно корректной, если существует заданная на* E, *коммутирующая с* A *операторная функция* $T_\alpha(t)$ *и числа* $M_1 > 0$, $\omega \in R$ *такие, что для любого* $u_0 \in D(A)$ *функция* $T_\alpha(t)u_0$ *является ее единственным решением и при этом*

$$\|T_\alpha(t)\| \le M_1 t^{\alpha-1} e^{\omega t}. \tag{5}$$

Согласно определению 2 задача (3), (4) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (5), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в $(0,\infty)$. Помимо этих обычных требований определение 2 содержит дополнительную информацию о поведении решения при $t \to 0$ и $t \to \infty$ (неравенство (5)).

Сформулируем далее условия, при которых будет установлена однозначная разрешимость задачи (1), (2).

Условие 1 *Оператор* A *таков, что задача* (3), (4) *равномерно корректна и* $u_0 \in D(A)$.

Укажем, что равномерная корректность задачи (3), (4) исследовалась в [4 – 6].

Условие 2 $D(A) \subset D(B)$ *и для любых* $x \in D(A)$, $t > 0$ *существуют постоянные* $M_2 > 0$, $\mu > 0$, $\omega \in R$ *такие, что*

$$I^\alpha \left(e^{-\omega t}\|BT_\alpha(\tau)x\|\right) \le M_2\, t^{\alpha+\mu-1}\|x\|. \tag{6}$$

Пример. Пусть $x \in D(A)$ и оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [7]), т.е.,

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le \frac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0,\ M_3 > 0.$$

Оператор A будет генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t)$. Возьмем оператор B, удовлетворяющий неравенству

$$\|BT_\alpha(t)x\| \le M_0 t^{-\gamma}\|x\|, \quad t \in (0,\infty),\ \gamma \in [0,1),$$

так что оператор B подчинен дробной степени $(-A)^\gamma$ (см. [7, с. 298]). Тогда (см. [8])

$$T_\alpha(t)x = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)T(\tau)x\, d\tau,$$

где неотрицательная функция $f_{\tau,\nu}(t)$ определена равенством

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \quad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!\ \Gamma(ak+b)}.$$

И, следовательно,

$$\|BT_\alpha(t)x\| \le \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)\|BT(\tau)x\|\, d\tau \le M_0 \int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(t)\tau^{-\gamma}\, d\tau\ \|x\| = \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha(1-\gamma)-1}\|x\|,$$

$$I^\alpha\left(\|BT_\alpha(t)x\|\right) \leq \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha(1-\gamma)-1}\,ds\,\|x\| =$$

$$= \frac{M_0\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha(1-\gamma))}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha(2-\gamma))}t^{\alpha+\alpha(1-\gamma)-1}\|x\|.$$

Таким образом, неравенство (6) выполнено при $\mu = \alpha(1-\gamma) > 0$.

Перестановочность операторов A и B не предполагается. Как будет доказано в дальнейшем, условия 1, 2 обеспечат разрешимость задачи (1), (2).

Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям 1 и 2. На элементах $x \in D(A)$ определим оператор

$$U_1(t)x = \int\limits_0^t T_\alpha(t-s)BT_\alpha(s)x\,ds, \tag{7}$$

при этом, в силу (5), (6) справедлива оценка

$$\|U_1(t)x\| \leq M_1\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{\omega(t-s)}\|BT_\alpha(s)x\|\,ds = M_1\Gamma(\alpha)e^{\omega t}I^\alpha\left(e^{-\omega t}\|BT_\alpha(t)x\|\right) \leq$$

$$\leq M_1M_2\Gamma(\alpha)\,t^{\alpha+\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{8}$$

Следовательно, для любого $t>0$ оператор $U_1(t)$ имеет единственное продолжение с $D(A)$ на все E с сохранением нормы. За продолженным оператором сохраним прежнее обозначение. Интегральное представление (7) справедливо только на элементах $x \in D(A)$.

Далее, на элементах $x \in D(A)$ определим оператор

$$U_2(t)x = \int\limits_0^t U_1(t-s)BT_\alpha(s)x\,ds, \tag{9}$$

при этом, в силу (8), (6) и полугруппового свойства операции дробного интегрирования, справедлива оценка

$$\|U_2(t)x\| \leq M_1M_2\Gamma(\alpha)\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha+\mu-1}e^{\omega(t-s)}\|BT_\alpha(s)x\|\,ds =$$

$$= M_1M_2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)e^{\omega t}I^\mu I^\alpha\left(e^{-\omega t}\|BT_\alpha(t)x\|\right) \leq M_1M_2^2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)e^{\omega t}I^\mu\left(t^{\alpha+\mu-1}\|x\|\right) =$$

$$= \frac{M_1M_2^2\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+2\mu)}\,t^{\alpha+2\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{10}$$

Оператор $U_2(t)$ имеет единственное продолжение с $D(A)$ на все E с сохранением нормы и за продолженным оператором сохраним прежнее обозначение. Интегральное представление (9) справедливо только на элементах $x \in D(A)$.

По индукции, на элементах $x \in D(A)$ определим операторы

$$U_n(t)x = \int\limits_0^t U_{n-1}(t-s)BT_\alpha(s)x\,ds, \quad U_0(t) = T_\alpha(t), \tag{11}$$

для которых, учитывая (10), получим оценку

$$\|U_n(t)x\| \le \frac{M_1 M_2^n \Gamma(\alpha)\Gamma^n(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha+n\mu)}\; t^{\alpha+n\mu-1}e^{\omega t}\|x\|. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили семейство заданных на E, экспоненциально ограниченных и, как следует из теоремы Банаха-Штейнгауза, сильно непрерывных при $t>0$ операторов $U_n(t)$, $n=0,1,2...$

Неравенство (12) позволяет ввести в рассмотрение ряд

$$G_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t). \tag{13}$$

Ряд (13) сходится при $t>0$, $\mu>0$ в пространстве $L(E)$ линейных ограниченных операторов поскольку, в силу (12),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|U_n(t)\| \le M_1\Gamma(\alpha)\; t^{\alpha-1}e^{\omega t}E_{\mu,\alpha}\left(M_2\;\Gamma(\alpha+\mu)\; t^{\mu}\right),$$

где $E_{\mu,\alpha}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Учитывая асимптотическое поведение функции типа Миттаг-Леффлера (см. [11, с. 134, 137]) для $G_\alpha(t)$ получим оценку вида

$$\|G_\alpha(t)\| \le M_{\alpha,\mu}\; t^{\alpha-1}e^{\Omega t}, \quad t>0 \tag{14}$$

с некоторыми постоянными $M_{\alpha,\mu}>0$, $\Omega>\omega$.

Суммируя равенства (11) для $n=0,1,2...$ при $x\in D(A)$ получим

$$G_\alpha(t)x = T_\alpha(t)x + \int\limits_0^t G_\alpha(t-s)BT_\alpha(s)x\; ds. \tag{15}$$

Теорема *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда функция* $u(t)=G_\alpha(t)u_0$ *является решением задачи* (1), (2).

Доказательство Учитывая результаты работы [8] о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения, сведем задачу (1), (2) к интегральному уравнению

$$u(t)x = T_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\alpha(t-s)Bu(s)u_0\; ds, \tag{16}$$

и покажем, что функция $G_\alpha(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (16). Учитывая (15), для этого достаточно установить справедливость равенства

$$\int\limits_0^t G_\alpha(t-s)BT_\alpha(s)u_0\; ds = \int\limits_0^t T_\alpha(t-s)BG_\alpha(s)u_0\; ds. \tag{17}$$

Принимая в расчет равенство (7), будем иметь

$$\int_0^t U_1(t-s)BT_\alpha(s)u_0\,ds = \int_0^t \int_0^{t-s} T_\alpha(t-s-\tau)BT_\alpha(\tau)\,d\tau\; BT_\alpha(s)u_0\,ds =$$

$$= \int_0^t \int_s^t T_\alpha(t-\xi)BT_\alpha(\xi-s)\,d\xi\; BT_\alpha(s)u_0\,ds =$$

$$= \int_0^t T_\alpha(t-\xi)B\int_0^\xi T_\alpha(\xi-s)BT_\alpha(s)u_0\,dsd\xi = \int_0^t T_\alpha(t-\xi)BU_1(\xi)u_0\,d\xi.$$

По индукции установим равенства

$$\int_0^t U_n(t-s)BT_\alpha(s)u_0\,ds = \int_0^t T_\alpha(t-\xi)BU_n(\xi)u_0\,d\xi, \quad n=0,1,2... \tag{18}$$

и, наконец, суммируя (18), получим (17). Теорема доказана.

Замечание. Вопрос единственности решения задачи (1), (2) в случае неограниченного оператора B весьма сложный. Укажем, что достаточным условием единственности в классе функций, удовлетворяющих неравенству (5), является отсутствие у оператора $A+B$ собственных значений вида λ^α при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Последнее утверждение легко доказывается, используя преобразование Лапласа.

Литература

1. Miyadera I. On perturbation theory for semi-groups of operators. Tôhoku Math. J. 18(1966). P. 299 – 310.

2. Voigt J. On the perturbation theory for strongly continuous semigroups. Math. Ann. 229(1977). P. 163 – 171.

3. Banasiak J., Arlotti L. Perturbations of positive semigroups with applications. Springer-Verlag London Limited. 2006.

4. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными. ДАН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597 – 600.

5. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. № 2. С. 74 – 77.

6. Глушак А.В., Поваляева Ю.В. О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. 2004. V. 14. P. 163 – 172.

7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.

8. Глушак А.В., Авад Х.К. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10, № 1. С. 25 – 31.

9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.

ON THE PERTURBATION ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING FRACTINAL DERIVATIVES OF RIEMANN-LIOUVILLE

H.K. Avad, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The solvability of the problem of Cauchy for the equation with fractional derivatives of Riemann-Liouville after perturbation of unbounded operators.

Keywords: equation with fractional derivatives, Cauchy-type problem, the perturbation of unbounded operators.

УДК 517.956

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.А. Алдашев

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова,
ул. Братьев Жубановых, 263, 030000, г. Актобе, Казахстан, e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе показано, что существует счетное множество собственных функций спектральной задачи Трикоми для многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения.

Ключевые слова: задача, сферические функции, гиперболо-параболические уравнения, спектр.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена ([1]). Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало ([2]).

Пусть D - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $|x| = t$, $|x| = 1 - t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, а при $t < 0$ – цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = t_0 < 0$, где $|x|$ –длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через D^+и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Часть конусов $|x| = t, |x| = 1 - t$, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0 и S^1 соответственно.

Пусть $S = \{(x,t) : t = 0, 0 < |x| < 1\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t) : t = 0, |x| = 1\}$.

В области D рассмотрим многомерное смешанно гиперболо-параболическое уравнение

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где γ- действительное число, Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \geq 2$.

Следуя ([1]), в качестве многомерной спектральной задачи Трикоми рассмотрим следующую

Задача $\mathbf{T}_\gamma$ Найти решение уравнения (1) в области D при $t \neq 0$ из класса $C\left(\overline{D} \backslash \Gamma_0\right) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 2, 3, ..., m - 1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ –система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Через $\bar{\tau}_n^k(r), \bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0)$.

Имеет место

Теорема. Задача T_γ для каждого γ имеет счетное множество собственных функций.

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = \gamma u. \tag{3}$$

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau - \gamma\tau = \nu(r,\theta), \tag{4}$$

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δсостоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи T_γ в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)\,Y_{n.m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ –функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (3) и (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \gamma\bar{u}_n^k, \tag{6}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k - \gamma\bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r), \quad 0 < r < 1, \tag{7}$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,r) = 0, \quad 0 \le r \le \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{8}$$

В (6) – (8) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$Lu_n^k \equiv u_{n\xi\eta}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k = \gamma\, u_n^k, \tag{9}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k - \gamma\tau_n^k = \nu_n^k(\xi), \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$u_n^k(\xi,0) = 0, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\,\bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\,\bar{v}_n^k(2\xi),$$

$$\overline{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4, \;\; k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...$$

Используя общее решение уравнения (9) ([4]), в [5] показано, что решение задачи Коши для уравнения (9) имеет вид

$$\begin{gathered} u_n^k(\xi,\eta)=\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+\tfrac{1}{2}\int\limits_\eta^\xi[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)- \\ -\tau_n^k(\xi_1)\tfrac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\mid_{\xi_1=\eta_1}]\,d\xi_1+\gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_0^{\eta}u_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1 d\eta_1, \end{gathered} \tag{12}$$

где $R\left(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta\right)=P_\mu\left(z\right)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения $Lu_n^k=0$ ([6]), $P_\mu\left(z\right)$ – функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$, а

$$\left.\frac{\partial}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1}=\left.\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\right|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ – нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\leq\xi$.

Из уравнения (12) при $\eta=0$ с учетом (11) имеем

$$0=\frac{\tau_n^k\left(\xi\right)}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\xi\nu_n^k\left(\xi_1\right)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1-\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi\frac{\tau_n^k\left(\xi_1\right)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1,\quad 0<\xi<\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Далее из (10), (13) будем иметь

$$\begin{gathered} 0=\frac{\tau_n^k\left(\xi\right)}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\xi\left(\tau_{n\xi_1\xi_1}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{\xi_1^2}\tau_n^k\left(\xi_1\right)-\gamma\tau_n^k\left(\xi_1\right)\right)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1-\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi\frac{\tau_n^k\left(\xi_1\right)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \\ 0<\xi<\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$\tau_n^k\left(\xi\right)=\xi^\beta,\quad 0<\xi<\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$1<\beta$ – постоянная, пока неизвестная.

Подставляя (15) в (14), получим

$$\left[1+\bar{\lambda}_n+\sqrt{2}\left(\beta-1\right)\xi\right]\int\limits_0^\xi\xi_1^{\beta-2}P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1=\gamma\int\limits_0^\xi\xi_1^\beta P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1,\quad 0<\xi<\frac{1}{2}. \tag{16}$$

Из формулы ([7])

$$\int\limits_0^1P_\mu\left(z\right)z^\gamma dz=\frac{\sqrt{\pi}2^{-\gamma-1}\Gamma\left(1+\gamma\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{3}{2}\right)},\quad\gamma>-1,$$

где Γ(z)- гамма–функция, вытекает, что если $\beta = \mu - 2s, \quad s = 1, 2, ...,$ то

$$\int\limits_0^\xi \xi_1^{\beta-2} P_\mu \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = \int\limits_0^\xi \xi_1^{\beta} P_\mu \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0,$$

откуда следует, что равенство (16) имеет место $\forall \gamma$.

Далее, подставив (15), (10) в (12), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u_n^k(\xi,\eta) = \gamma \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int\limits_0^{\eta} u_n^k(\xi_1,\eta_1) P_\mu(z) d\xi_1 d\eta_1 + f_n^k(\xi,\eta), \tag{17}$$

где

$$f_n^k(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}(\xi^\beta + \eta^\beta) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_\eta^\xi \left\{ \left[\left(\beta\left(\beta-1\right) + \bar{\lambda}_n\right) \xi_1^{\beta-2} - \gamma \xi_1^\beta \right] P_\mu \left[\tfrac{\xi_1^2 + \xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] - \right.$$
$$\left. - \tfrac{\xi_1^{\beta-1}(\xi-\eta)}{\sqrt{2}(\xi+\eta)} P'_\mu \left[\tfrac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] \right\} d\xi_1, \beta = \mu - 2s, \ \ s = 0, 1, ... \tag{18}$$

Учитывая оценки ([3])

$$k_n \leq C n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^p}{\partial \theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq C n^{\frac{m}{2} - p + 1}, \quad C = const,$$

$j = \overline{1, m-1}, p = 0, 1, ...,$ нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\beta + (1-m)/2} Y_{n,m}^k(\theta) \tag{19}$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l > \frac{3m}{2}, \beta = \mu - 2s > \frac{(m-1)}{2}$.

Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{20}$$

является решением задачи (3), (2), (19) в области D^+, где функции $u_n^k(r,t)\,, \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...,$находятся по формуле (17) и принадлежат классу $C\left(\overline{D}^+\right) \cap C^1\left(D^+ \bigcup S\right) \cap C^2\left(D^+\right).$

Таким образом, мы пришли в области D^- к спектральной задаче для уравнения

$$\Delta_x u - u_t = \gamma u \tag{21}$$

с условиями

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta)\,, \quad u\Big|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (21), будем иметь

$$u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \gamma u_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ... \tag{23}$$

При этом краевое условие (22) имеет вид

$$u_n^k(r,0)=n^{-l}r^{\beta},\quad u_n^k(1,t)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,.... \tag{24}$$

Решение задачи (23), (24) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t)=R_n^k(r)\,T_n^k(t)\,. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (23), с учетом (24), получим

$$R_{nrr}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_n^k+(\mu-\gamma)R_n^k=0,\quad 0<r<1, \tag{26}$$

$$R_n^k(0)=0,\quad R_n^k(1)=0, \tag{27}$$

$$T_{nt}^k+\mu T_n^k=0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (26), (27) является функция ([8])

$$R_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}a_sJ_\nu\left(\mu_s^\nu r\right),\quad 0<r<1, \tag{29}$$

$\nu=n+\frac{m-2}{2}$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода, μ_s^ν–ее нули, $\mu=\gamma+\left(\mu_s^\nu\right)^2$, а решением уравнения (28) является

$$T_{n,s}^k(t)=\exp\left(-\left(\gamma+(\mu_s^\nu)^2\right)\ t\right). \tag{30}$$

Далее из (25), (29), (30), с учетом (24), имеем

$$n^{-l}r^{\beta-\frac{1}{2}}=\sum_{s=1}^{\infty}a_sJ_\nu\left(\mu_s^\nu r\right),\quad 0<r<1. \tag{31}$$

Разлагая функцию $r^{\beta-\frac{1}{2}}$ в ряд Фурье-Бесселя ([9]), найдем из (31) коэффициенты a_s

$$a_s=\frac{2n^{-l}}{\left[J_{\nu+1}\left(\mu_s^\nu\right)\right]^2}\int_0^1\xi^{\beta+\frac{1}{2}}J_\nu\left(\mu_s^\nu\xi\right)d\xi, \tag{32}$$

при этом μ_s^ν–положительные нули функции Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, из (25), (29), (30) следует, что решением задачи (21), (22) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty}a_sr^{\frac{(2-m)}{2}}J_\nu\left(\mu_s^\nu r\right)\exp\left(-(\gamma+(\mu_s^\nu)^2)t\right)Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{33}$$

и принадлежит классу $C\left(\bar{D}^-\backslash\Gamma_0\right)\cap C^1\left(D^-\cup S\right)\cap C^2\left(D^-\right)$, где a_s определяются из (32).

Следовательно, задача T_γ для каждого γ имеет собственные функции вида (20) и (33), причем, в силу (18), (32), их – счетное множество.

Теорема доказана.

Литература

1. А.М. Нахушев. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М: Наука, 2006 - 287с.

2. В.Н. Врагов. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики // Новосибирск:НГУ, 1983 – 84с.

3. С.Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М : Физматгиз, 1962-254 с.

4. А.В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа. М : Изд-во А Н СССР, 1959-164 с.

5. С .А. Алдашев. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы; Гылым, 1994 - 170с.

6. E.T. Copson. On the Riemann-Green function. // J.Rath. Mech and Anal., 1958, vol 1, p.324-348.

7. Г. Бейтмен , А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.1-М: Наука, 1973 - 294с.

8. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1965 - 703с.

9. Г. Бейтмен , А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.2 -М: Наука, 1974 - 295с.

THE EXISTENCE OF EIGENFUNCTIONS OF THE SPECTRAL TRICOMI PROBLEM FOR A MULTI-DIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

S.A. Aldashev

Kh. Zhubanov Aktubinsk State University,
Br. Zhubanovykh str., 263, Aktobe, 030000, Kazakhstan, e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. In work is shown that exists the counting ensemble own function spectral problem of Tricomi for multivariate mixed hyperbolic – parabolic equation.

Keywords: problem, spherical functions, hyperbolic – parabolic equations, spectrum.

УДК 517.968

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ВЕСОВЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С.Н. Асхабов

Чеченский государственный университет,
ул. Киевская, 33, 364037, г. Грозный, Россия, e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация. Методом монотонных операторов доказываются теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала в весовых комплексных пространствах Лебега. Получены также оценки норм решений.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, операторы типа потенциала, весовые пространства Лебега, метод монотонных операторов.

1 Введение

В работе рассматриваются различные классы нелинейных уравнений, содержащих операторы вида

$$(B^\alpha u)(x) = \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\,, \quad 0 < \alpha < 1\,,$$

где $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция Эйлера, а заданная комплекснозначная функция $b(x) \neq 0$ почти всюду на $\mathbf{R}^1 = (-\infty, \infty)$. Получены нелокальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в комплексных пространствах $L_p(\rho)$ с общим весом $\rho(x)$, $1 < p < \infty$, а также оценки норм решений. В основе исследования лежит метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов и некоторые его модификации, связанные, в частности, с комбинированием его с принципом сжимающих отображений. При этом существенно используется найденное в работе условие на функцию $b(x)$, обеспечивающее непрерывное действие оператора B^α из $L_p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, и его положительность:

$$\mathrm{Re}\langle B^\alpha u, u\rangle = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \right) \overline{u(x)} dx \geq 0\,, \quad \forall u(x) \in L_p(\rho)\,.$$

В связи с результатами данной статьи отметим работы К.Ф. Андерсена, Э.Т. Сойера [1] и Д.В. Прохорова, В.Д. Степанова [2], где в *вещественных* пространствах $L_p(0,\infty)$ рассмотрены, соответственно, весовые операторы Римана-Лиувилля вида:

$$(B^\alpha_{0+} u)(x) = \frac{b(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,, \quad (R^\alpha u)(x) = \frac{b_1(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{b_2(t)\, u(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,,$$

при условии, что $0 < \alpha < 1/p$ и $1 < p < q = p/(1 - \alpha \cdot p)$. В [1] доказано, что если $b(x)$ есть почти всюду положительная локально суммируемая на полуоси $[0, \infty)$ функция, то оператор B^{α}_{0+} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$, если и только если

$$\sup_{0<h<a} \left(\frac{1}{h} \int\limits_{a}^{a+h} b^q(x)dx \right)^{1/q} \left(\frac{1}{h} \int\limits_{a-h}^{a} b^{p'}(x)dx \right)^{1/p'} < \infty \, .$$

Тем самым в [1] дано непосредственное обобщение известной теоремы Харди-Литтлвуда, в которой $b(x) = 1$. В статье [2] при условии монотонности одной из функций $b_1(x)$, $b_2(x)$ получены критерии ограниченности и компактности оператора R^{α} как оператора, действующего из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$. В монографии [3], в связи с приложениями к интегральным уравнениям с монотонными нелинейностями, найдено условие на функцию $b(x)$ при котором оператор B^{α}_{0+} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$ (в частности, из $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$) и, что особенно важно, обладает свойством положительности. А именно, в [3] доказано, что если $p \in [2, \infty)$ и $b(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(0, \infty)$, то оператор B^{α}_{0+} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$ и является строго положительным. При этом функция $b(x)$ не обязана быть почти всюду положительной как в [1] (достаточно, чтобы она была почти всюду отлична от нуля). Кроме того, если в [1] взять $p < q = p'$, то получим, что $p = 2/(1 + \alpha) \in (1, 2)$, тогда как в [3] $p \in [2, \infty)$ и можно брать $p = p' = 2$. В [3] также доказано, что если $p \in [2, \infty)$ и $b_1(x), b_2(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(0, \infty)$, то оператор R^{α} действует непрерывно из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$. Следует отметить, что в статье Д.В. Прохорова, В.Д. Степанова [2] получен критерий существования в "малом" решения уравнения

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{u^p(t)\, dt}{(x - t)^{1-\alpha}} + \varepsilon \cdot f(x) \, , \; x \in (0, a) \, , \; a, \varepsilon \in (0, \infty) \, ,$$

со степенной нелинейностью в классе *неотрицательных* почти всюду конечных на полуоси функций. В данной работе разыскиваются решения других уравнений с монотонными (не обязательно степенными) нелинейностями в *комплексных* весовых пространствах Лебега.

2 Условия положительности операторов с ядрами типа потенциала

Рассмотрим сначала вопрос о положительности оператора типа потенциала

$$(I^{\alpha}u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x - t|^{1-\alpha}} \, , \; 0 < \alpha < 1 \, , \; x \in \mathbf{R}^1,$$

в *комплексном* пространстве $L_p(\mathbf{R}^1)$. Обозначим через $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^1)$ множество всех бесконечнодифференцируемых финитных на оси $\mathbf{R}^1$ функций.

Лемма 1 *Оператор I^{α} действует из $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$ и является непрерывным, симметрическим и строго положительным.*

Доказательство. То, что оператор $I^\alpha : L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1}) \to L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$ и непрерывен вытекает из теоремы Харди-Литтлвуда (см. следствие 3.1 в [3]). Докажем, что оператор I^α является положительным в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, т.е. что

$$\mathrm{Re}\,\langle I^\alpha u, u\rangle = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx \ge 0,\ \forall u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})\,. \tag{1}$$

Для этого воспользуемся известной формулой для гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(z)\cdot\cos\frac{\pi\cdot z}{2} = \int\limits_0^\infty t^{z-1}\cos t\,dt\ , \qquad 0 < Re\,z < 1\ . \tag{2}$$

Далее будем придерживаться схемы доказательства теоремы 1.3.1 А.М. Нахушева [4], в которой рассмотрен оператор типа потенциала I^α_{ab} на конечном отрезке $[a,b]$. Сделаем сначала в (2) подстановку $t=\xi\cdot\eta$, где $\xi>0$ - любое число, и затем положим $\xi=|x-t|$ и $z=1-\alpha$. В результате получим

$$\Gamma(1-\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot|x-t|^{\alpha-1} = \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha}\cos\left[\eta\cdot(x-t)\right]d\eta\ . \tag{3}$$

Пусть $u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ произвольная функция. В силу равенства (3) имеем

$$\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot\langle I^\alpha u,u\rangle =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\cdot\sin\frac{\pi\cdot\alpha}{2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right)\overline{u(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} cos\left[\eta\,(x-t)\right]d\eta\right]u(t)\,dt\right)\overline{u(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot cos\left[\eta\,(x-t)\right]dt\right)\overline{u(x)}\,dx\right]\frac{d\eta}{\eta^\alpha} =$$

$$= \int\limits_0^\infty\left(\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\eta\,t)\cdot u(t)\,dt\right|^2 + \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(\eta\,t)\cdot u(t)\,dt\right|^2\right)\frac{d\eta}{\eta^\alpha}\,. \tag{4}$$

Поскольку $\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin(\pi\,\alpha/2)>0$ при $0<\alpha<1$, то из (4) следует, что $\langle I^\alpha u,u\rangle\ge 0$, $\forall u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$. Так как класс $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ плотен в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, то на основании теоремы Банаха (см., например, теорему 1.7 из [5]) получаем:

$$\langle I^\alpha u,u\rangle \ge 0,\ \forall u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)\,, \tag{5}$$

т.е. оператор I^α является положительным в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$.

То, что оператор I^α является симметрическим сразу вытекает из четности его ядра $|x|^{\alpha-1}$.

Докажем, наконец, что оператор I^α является строго положительным в комплексном пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, т.е. что знак равенства в (5) достигается лишь на функции $u(x)=0$ (заметим, что здесь схема доказательства из [4] не применима). Для этого, в силу плотности $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$ в $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$, достаточно рассмотреть функции из $C_0^\infty(\mathbf{R^1})$. Итак, пусть $\langle I^\alpha u, u\rangle = 0$ и $u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R^1})$. Тогда, в силу равенства (4), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\cos(\eta\, t)\,dt = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\sin(\eta\, t)\,dt = 0$$

для любого $\eta \geq 0$, а, значит, и для любого $\eta \in \mathbf{R}^1$. Поэтому

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot e^{-i\,x\,t}dt = 0\,, \quad \forall x\in\mathbf{R^1}. \tag{6}$$

Согласно теореме 1.9 из [6], для всех $x\in\mathbf{R^1}$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|t|}{N}\right)\widehat{u}(t)\,e^{i\,x\,t}dt\ .$$

Но тогда, в силу равенства (6), $u(x)=0$ - что и требовалось доказать.

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 1, символ Re всюду в неравенстве (1) можно *опустить*. Этого и следовало ожидать, поскольку хорошо известно, что скалярное произведение (Ax,x) *вещественно* для любого элемента x из *комплексного* гильбертова пространства H, если A является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим из H в H.

Пусть $\rho(x)$ есть произвольная неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля на $\mathbf{R}^1$ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p>1$, множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbf{R}^1$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$||u||_{p,1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Известно [7], что $L_p(\rho)$ есть *рефлексивное банахово* пространство и *сопряженным* с ним является $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p'=p/(p-1)$. Будем писать $u(x)\in L_p^+(\rho)$, если $u(x)\in L_p(\rho)$ и $u(x)$ является неотрицательной на $\mathbf{R}^1$ функцией. Обозначим через $\|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ норму оператора I^α действующего непрерывно, согласно лемме 1, из $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R^1})$ в $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R^1})$, а через $\|\cdot\|_{p,q}$ - норму в пространстве $L_p(\rho^q)$. Если $\rho(x)=1$, то будем писать $L_p(\mathbf{R}^1)$ и $||\cdot||_{p,0} = \|\cdot\|_p$.

Лемма 2 *Пусть* $2\leq p<\infty$, $r=2/[p\,(1+\alpha)-2]$ *и функция* $b(x)\in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$. *Тогда оператор* B^α *действует непрерывно из* $L_p(\rho)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и* *является строго положительным симметрическим оператором, причем* $\forall u(x) \in L_p(\rho)$ *выполняются неравенства*

$$||B^\alpha u||_{p',\,1-p'} \leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||u||_{p,\,1} \quad \text{и} \quad \langle B^\alpha u, u\rangle \geq 0 \ . \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u \in L_p(\rho)$. Тогда

$$||b\,u||_{2/(1+\alpha)} \leq ||b||_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||u||_{p,\,1} \ . \tag{8}$$

В силу леммы 1 и неравенства (8), $I^\alpha(b\,u) \in L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и

$$||I^\alpha(b\,u)||_{2/(1-\alpha)} \leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||u||_{p,\,1}\,, \quad \forall u \in L_p(\rho) \ . \tag{9}$$

Аналогично, имеем:

$$||B^\alpha u||_{p',\,1-p'} = \|\overline{b}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p',\,1-p'} \leq ||b||_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||I^\alpha(b\,u)||_{2/(1-\alpha)} \ . \tag{10}$$

Из (10) и (9) непосредственно вытекает первое неравенство из (7). Значит, оператор B^α действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Далее, замечая, что $b \cdot u \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и $\langle B^\alpha u, u\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,u\rangle$, на основании леммы 1 получаем, что оператор B^α является строго положительным. Наконец, используя симметричность оператора I^α, для любых $u, v \in L_p(\rho)$ имеем

$$\langle B^\alpha u, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,v\rangle = \langle b\,u, I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, b\,I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, B^\alpha v\rangle \ ,$$

т.е. B^α является симметрическим оператором.

Лемма 3 *Пусть* $1 < p \leq 2$ *и* $b(x) \in L_{p\cdot q}(\rho^q)$, *где* $q = 2/[2 - p\,(1-\alpha)]$. *Тогда оператор* B^α *действует из* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *в* $L_p(\rho)$, *непрерывен, строго положителен и симметричен, причем* $\forall v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *выполняются неравенства*

$$||B^\alpha v||_{p,\,1} \leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot q,\,q} \cdot ||v||_{p',\,1-p'} \quad \text{и} \quad \langle B^\alpha v, v\rangle \geq 0 \ . \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Тогда

$$||b\,v||_{2/(1+\alpha)} \leq ||b||_{p\cdot q,\,q} \cdot ||v||_{p',\,1-p'} \ . \tag{12}$$

В силу леммы 1 и неравенства (12), $I^\alpha(b\,v) \in L_{2/(1-\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и

$$||I^\alpha(b\,v)||_{2/(1-\alpha)} \leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||_{p\cdot q,\,q} \cdot ||v||_{p',\,1-p'} \ . \tag{13}$$

Аналогично,

$$||B^\alpha v||_{p,\,1} \leq ||b||_{p\cdot q,\,q} \cdot ||I^\alpha(b\,v)||_{2/(1-\alpha)} \ . \tag{14}$$

Из (14) и (13) непосредственно вытекает первое неравенство из (11). Значит, оператор B^α действует непрерывно из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$. Далее, замечая, что $b \cdot v \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbf{R}^1)$ и $\langle B^\alpha v, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,v), b\,v\rangle$, на основании леммы 1 получаем, что оператор B^α является строго положительным. Наконец, используя симметричность оператора I^α, для любых $u, v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$ имеем

$$\langle B^\alpha u, v\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), b\,v\rangle = \langle b\,u, I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, b\,I^\alpha(b\,v)\rangle = \langle u, B^\alpha v\rangle \ ,$$

т.е. B^α является симметрическим оператором.

Следствие 1. *Если* $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, *то оператор* B^α *действует из* $L_2(\mathbf{R}^1)$ *в* $L_2(\mathbf{R}^1)$, *ограничен, строго положителен и симметричен, причем*

$$||B^\alpha u||_2 \leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{2/\alpha} \cdot ||u||_2 \quad \text{и} \quad (B^\alpha u, u) \geq 0\,, \quad \forall u \in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \tag{15}$$

3 Теоремы существования и единственности решения. Оценки норм решений

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех комплексных чисел. Выпишем для удобства ссылок все ограничения, накладываемые ниже на комплекснозначную функцию $F(x,z):\mathbf{R^1}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, удовлетворяющую *условиям Каратеодори* [3] и определяющую нелинейность исследуемых в этом параграфе нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. Именно, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия **1)-3)**, либо условия **4)-6)**:

1) *существуют* $c(x)\in L^+_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и* $d_1>0$ *такие,что для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и любого* $z\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)|\le c(x)+d_1\cdot\rho(x)\cdot|z|^{p-1}.$$

2) *для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и всех* $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$Re\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}\ge 0.$$

3) *существуют* $D(x)\in L^+_1(\mathbf{R^1})$ *и* $d_2>0$ *такие, что для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и всех* $z\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$Re\left\{F(x,z)\cdot\overline{z}\right\}\ge d_2\cdot\rho(x)\cdot|z|^p-D(x).$$

4) *существуют* $g(x)\in L_p(\rho)$ *и* $d_3>0$ *такие,что для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и любого* $z\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)|\le g(x)+d_3\cdot\left([\rho(x)]^{-1}\cdot|z|\right)^{1/(p-1)}.$$

5) *для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и всех* $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$Re\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}>0.$$

6) *существуют* $D(x)\in L^+_1(\mathbf{R^1})$ *и* $d_4>0$ *такие, что для почти всех* $x\in\mathbf{R^1}$ *и всех* $z\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$Re\left\{F(x,z)\cdot\overline{z}\right\}\ge d_4\cdot\left([\rho(x)]^{-1}\cdot|z|\right)^{1/(p-1)}\cdot|z|-D(x).$$

Замечание 2. Если выполнены условия 1)-3), то оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным. Если же выполнены условия 4)-6), то оператор F действует из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$ и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором (см., например, теоремы 2.1, 2.2 и лемму 2.1 в [3]).

Доказательство следующей теоремы основано на теореме Браудера-Минти (см., например, теорему 1.8 в [3]).

Теорема 1 *Пусть* $0<\alpha<1$, $2\le p<\infty$ *и* $b(x)\in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$, *где* $r=2/[p\,(1+\alpha)-2]$. *Если выполнены условия 1)-3), то уравнение*

$$F[x,u(x)]+\frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}=f(x)\tag{16}$$

имеет решение $u^*(x)\in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x)\in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. *Решение единственно, если* $b(x)\ne 0$ *почти всюду на* $\mathbf{R^1}$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x)=0$, *то* $\|u^*\|_{p,1}\le\left(d_2^{-1}\,||f||_{p',1-p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Запишем данное уравнение (16) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = Fu + B^{\alpha}u$. Из условий 1)-3) (см. замечание 2) вытекает, что оператор суперпозиции $F : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 2 оператор $B^{\alpha} : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен. Следовательно оператор $A : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение $Au = f$, а с ним и данное уравнение (16), имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$.

Осталось доказать оценку нормы решения. Так как $Au^* = f$, то используя условие 3) при $D(x) = 0$ и второе неравенство из (7), имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \mathrm{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle + \langle B^{\alpha}u^*, u^*\rangle = \mathrm{Re}\langle f, u^*\rangle \le ||f||_{p',\sigma} \cdot ||u^*||_{p,\rho} ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

В следующей теореме $p < 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 2 *Пусть $1 < p < 2$ и нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 1)-3) при $\rho(x) = 1$. Тогда уравнение*

$$F[x, u(x)] + \lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2\,(p-1)/p}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_{p'}(\mathbf{R^1})$. Кроме того, если условие 3) выполняется при $D(x) = 0$ и $\rho(x) = 1$, то справедлива оценка $||u^*||_p \le \left(d_2^{-1} \cdot ||f||_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство теоремы 2 проводится точно так же, как и в теореме 1, с использованием следствия 3.2 [3] вместо леммы 1.

Положив $p = 4/3$ в теореме 2, получим следующее

Следствие 2. *При любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$\sqrt[3]{u(x)} + \lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{\sqrt{|s-x|}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$, причем $||u^*||_{4/3} \le ||f||_4^3$.

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных уравнений типа потенциала, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла. В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений.

Теорема 3 *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le 2$ и $b(x) \in L_{p\cdot q}(\rho^q)$, $q = 2/[2 - p(1-\alpha)]$. Если $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 5), то уравнение*

$$u(x) + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\, F[s, u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{17}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ при любом $f(x) \in L_p(\rho)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то $\|u^*\|_{p,1} \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_{p,1}$.

Доказательство. В силу замечания 2 оператор F отображает $L_p(\rho)$ на $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [3], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ на $L_p(\rho)$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Поэтому, с учетом леммы 3, имеем, что оператор $A = F^{-1} + B^{\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы Браудера-Минти. Значит, уравнение $F^{-1}v + B^{\alpha}v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(\rho)$ является решением уравнения $u + B^{\alpha}Fu = f$, т.е. данного уравнения (17). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + B^{\alpha}v^* = f$ и $F\,F^{-1}\psi = \psi, \quad \forall\psi \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$, то

$$u^* + B^{\alpha}Fu^* = F^{-1}v^* + B^{\alpha}F\,F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + B^{\alpha}v^* = f\ . \tag{18}$$

Докажем единственность решения уравнения (17). В самом деле, если допустить противное, что уравнение (17) имеет два различных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + B^{\alpha}Fu_1 = f$ и $u_2 + B^{\alpha}Fu_2 = f$, то придем к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\langle u_1 + B^{\alpha}Fu_1 - u_2 - B^{\alpha}Fu_2, Fu_1 - Fu_2\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\langle u_1 - u_2, Fu_1 - Fu_2\rangle + \langle B^{\alpha}(Fu_1 - Fu_2), Fu_1 - Fu_2\rangle > 0$$

так как в силу условия 5) и леммы 3, оба последних слагаемых строго положительны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), второе неравенство из (11), равенство (18) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \mathrm{Re}\langle u^*, Fu^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle f, Fu^*\rangle \le d_1 \cdot ||f||_{p,\rho} \cdot ||u^*||^{p-1}_{p,\rho}\ ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

В следующей теореме $p > 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 4 *Пусть $2 < p < \infty$ и нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 5) при $\rho(x) = 1$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[s, u(s)]}{|s-x|^{2/p}}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка $\|u^*\|_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_p$.

Доказательство теоремы 4 проводится точно так же как и в теореме 3 с использованием следствия 3.3 [3] вместо леммы 3.

Следствие 3. *При любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3(s)\,ds}{\sqrt{|s-x|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(\mathbf{R}^1)$, причем $||u^*||_4 \le ||f||_4$.

Рассмотрим, наконец, класс нелинейных уравнений, соответствующий случаю когда интегральный оператор с ядром типа потенциала входит в уравнение нелинейно. Обратим внимание на то, что в этом случае ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор суперпозиции действовал непрерывно из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$ и был строго монотонным и коэрцитивным.

Теорема 5 *Пусть* $2 \le p < \infty$ *и* $b(x) \in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$, *где* $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. *Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 4)-6), то уравнение*

$$u(x) + F\left[x,\ \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right] = f(x) \tag{19}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_p(\rho)$. *Кроме того, если в условиях 4) и 6)* $g(x) = 0$ *и* $D(x) = 0$, *то*

$$||u^* - f||_{p,1} \le \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,\,-r} \cdot ||f||_{p,1}\right]^{1/(p-1)}.$$

Доказательство. Из леммы 2 и условий 4)-6) вытекает, соответственно, что оператор $B^\alpha : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен, а оператор $F : L_{p'}(\rho^{1-p'}) \to L_p(\rho)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [3], существует хеминепрерывный, строго монотонный, коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Запишем уравнение (19) в операторном виде: $u + F\,B^\alpha u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = 0\ , \qquad \Phi v \equiv F^{-1} v + B^\alpha v - B^\alpha f\ . \tag{20}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти, то уравнение (20) имеет единственное решение $v^* \in L_p(\rho)$. Но тогда данное уравнение (19) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p(\rho)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (19) имеет два разных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + FB^\alpha u_1 = f$ и $u_2 + FB^\alpha u_2 = f$. Тогда приходим к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\langle u_1 + F\,B^\alpha u_1 - u_2 - F\,B^\alpha u_2, B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle =$$

$$= \langle u_1 - u_2, B^\alpha(u_1 - u_2)\rangle + \mathrm{Re}\langle F\,B^\alpha u_1 - F\,B^\alpha u_2, B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle > 0$$

так как, в силу леммы 2 и условия 5), оба последних слагаемых в правой части строго положительны (заметим, что $B^\alpha(u_1 - u_2) \ne 0$, так как если предположить противное, то получим противоречие: $0 = \langle B^\alpha(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle > 0$, в силу леммы 2).

Осталось доказать оценку нормы $\|u^* - f\|_{p,1}$. Воспользуемся доказанными равенствами $u^* + F\,B^\alpha u^* = f$ и $F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = B^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x) = D(x) = 0$, оба неравенства из (7) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_4\,||\psi||^{p'}_{p',\sigma} \le \mathrm{Re}\langle F\psi, \psi\rangle = \mathrm{Re}\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \le \mathrm{Re}\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \langle v^*, B^\alpha v^*\rangle \le$$

$$\leq ||v^*||_{p,1} \cdot ||B^\alpha f||_{p',1-p'} \leq ||v^*||_{p,1} \cdot \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} =$$

$$= \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} \cdot ||F\psi||_{p,1} \leq$$

$$\leq \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} \cdot d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',1-p'} ,$$

откуда

$$||\psi||_{p',1-p'} \leq d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1} . \tag{21}$$

Так как $||f - u^*||_{p,1} = ||v^*||_{p,1} = ||F\psi||_{p,1} \leq d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',1-p'}$ то, используя оценку (21) с учетом, что $p' - 1 = 1/(p-1)$, получаем

$$||u^* - f||_{p,1} \leq d_3 \cdot \left[d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,1}\right]^{1/(p-1)} .$$

Если вместо леммы 2 использовать следствие 3.2 [3], то точно так же как и теорема 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 6 *Пусть* $1 < p < 2$ *и нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 4)-6) при* $\rho(x) = 1$. *Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{|x-s|^{2(p-1)/p}}\, ds\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$ *при любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_p(\mathbf{R^1})$. *Кроме того, если в условиях 4) и 6)* $g(x) = D(x) = 0$ *и* $\rho(x) = 1$, *то справедлива оценка:* $\|u^* - f\|_p \leq \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|f\|_p\right]^{1/(p-1)}$.

Следствие 4. *При любом* $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)\, ds}{\sqrt{|s-x|}}\right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}(\mathbf{R}^1)$, *причем* $\|u^* - f\|_{4/3} \leq \lambda \cdot \left(\|I^{1/2}\|_{4/3\to 4} \cdot \|f\|_{4/3}\right)^3$.

4 Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала

Теоремы 1-6 предоставляют условия существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, но они не содержат информации о том как можно найти эти решения. Рассмотрим в этой связи вопрос о приближенном их решении в *комплексных* пространствах $L_2(\mathbf{R}^1)$.

Теорема 7 *Пусть функция $F(x,z)$ удовлетворяет условиям:*

7) *существует $M>0$ такое, что для любых $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ и почти всех $x\in\mathbf{R}^1$ выполняется неравенство* **:** $|F(x,z_1)-F(x,z_2)|\le M\cdot|z_1-z_2|$ *;*

8) *существует $m>0$ такое, что для любых $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ и почти всех $x\in\mathbf{R}^1$ выполняется неравенство* **:** $\mathrm{Re}\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}\ge m\cdot|z_1-z_2|^2$ *.*

Если $b(x)\in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0<\alpha<1$, то при любом $f(x)\in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение

$$F[x,u(x)]+\frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}=f(x) \qquad (22)$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n=u_{n-1}-\mu\cdot(Fu_{n-1}+B^\alpha u_{n-1}-f)\,,\qquad n\in\mathbf{N}\,, \qquad (23)$$

причем справедлива оценка погрешности:

$$||u_n-u^*||_2\le\mu\cdot\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\cdot||Fu_0+B^\alpha u_0-f||_2\,, \qquad (24)$$

где $\mu=m/(M+\|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}\cdot\|b\|^2_{2/\alpha})^2$, $\alpha=\sqrt{1-m/\mu}<1$, $u_0(x)\in L_2(\mathbf{R}^1)$ - *произвольная функция.*

Доказательство. Запишем данное уравнение (22) в операторном виде: $Au=f$, где $Au\equiv Fu+B^\alpha u$. Так как $b(x)\in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, то, в силу следствия 1, оператор B^α действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и является строго положительным оператором, причем $\forall u(x)\in L_2(\mathbf{R}^1)$ выполняются неравенства

$$\|B^\alpha u\|_2\le\|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}\cdot\|b\|^2_{2/\alpha}\cdot\|u\|_2\quad\text{и}\quad(B^\alpha u,u)\ge 0\,. \qquad (25)$$

Из условия 7) следует, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu-Fv\|_2\le M\cdot\|u-v\|_2\,,\quad\forall u,v\in L_2(\mathbf{R}^1)\,, \qquad (26)$$

а из условия 8) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$\mathrm{Re}\,(Fu-Fv,u-v)\ge m\cdot\|u-v\|_2^2\,,\quad\forall u,v\in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \qquad (27)$$

Используя неравенства (25)-(27), имеем

$$\|Au-Av\|_2\le\left(M+\|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}\cdot\|b\|^2_{2/\alpha}\right)\cdot\|u-v\|_2\,, \qquad (28)$$

$$\mathrm{Re}\,(Au-Av,u-v)\ge m\cdot\|u-v\|_2^2\,,\quad\forall u,v\in L_2(\mathbf{R}^1)\,. \qquad (29)$$

Из неравенств (28) и (29), в частности, вытекает, что оператор A действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы

Браудера-Минти, уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле (23) и что справедлива оценка скорости их сходимости (24). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение $u = \Phi\, u$, где $\Phi\, u \equiv u - \mu \cdot (Au - f)$ (число μ определено в формулировке теоремы), которое эквивалентно данному уравнению $Au = f$. Очевидно, что оператор Φ действует непрерывно из $L_2(\mathbf{R}^1)$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ и, силу оценок (28) и (29), $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2^2 \le \|u - v\|_2^2 - 2\,\mu\, \mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) +$$

$$+\mu^2 \cdot \|Au - Av\|_2^2 \le \left[1 - m^2/(M + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|_{2/\alpha}^2)^2\right] \cdot \|u - v\|_2^2\,,$$

т.е. $\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \le \alpha \cdot \|u - v\|_2$, где α определено в формулировке теоремы. Следовательно, доказываемые утверждения (23) и (24) непосредственно вытекают из принципа сжимающих отображений.

Теорема 8 *Пусть $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x, z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$u(x) + \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s) \cdot F[s, u(s)]}{|s - x|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{30}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = F^{-1} v_n\,, \quad v_n = v_{n-1} - \mu \cdot \left(B^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{31}$$

где $\mu = m/[M \cdot (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|_{2/\alpha}^2)]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2\,, \tag{32}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2}$, а $v_0(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ - произвольная функция.

Доказательство. Из оценок (26) и (27) вытекает, что оператор суперпозиции F имеет обратный оператор $F^{-1} : L_2(\mathbf{R}^1) \to L_2(\mathbf{R}^1)$, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ выполняются неравенства (см., например, [3]):

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \le m^{-1} \cdot \|u - v\|_2\,, \tag{33}$$

$$\mathrm{Re}\,(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \ge m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2\,. \tag{34}$$

Запишем данное уравнение (30) в операторном виде:

$$u + B^\alpha F u = f\,. \tag{35}$$

По теореме 3 оно имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что последовательность (31) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (32). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Phi\, v = f\,, \quad \text{где} \quad \Phi\, v \equiv F^{-1} v + B^\alpha v\,. \tag{36}$$

Очевидно, что если $v^* \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является решением уравнения (36), то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является решением уравнения (35). Поэтому достаточно доказать, что уравнение (36) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем его можно найти по формуле (31) и справедлива оценка (32). Используя неравенства (25), (33) и (34), $\forall u(x), v(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ имеем:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \le (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha}) \cdot \|u - v\|_2\,, \tag{37}$$

$$\mathrm{Re}\,(\Phi\, u - \Phi\, v, u - v) \ge m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2\,. \tag{38}$$

Далее, заменяя уравнение (36) на эквивалентное уравнение $v = \Psi\, v$, где $\Psi\, v \equiv v - \mu \cdot (\Phi\, v - f)$, как и при доказательстве теоремы 7, получим $\|\Psi\, u - \Psi\, v\|_2 \le \alpha \cdot \|u - v\|_2$, где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2} < 1$. Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $v = \Psi\, v$, а значит и уравнение (36), имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем последовательность

$$v_n = \Psi\, v_{n-1} = v_{n-1} - \mu \cdot \left(B^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right)\,,$$

т.е. последовательность (31), сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|\Psi\, v_0 - v_0\|_2 = \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f||_2\,. \tag{39}$$

Наконец, замечая, что $v^* = Fu^*$ и используя неравенства (33), (39), получаем

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \le m^{-1} \cdot \|v_n - v^*\|_2 \le$$

$$\le \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|B^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2\,,$$

т.е. справедливо неравенство (32).

Теорема 9 *Пусть $b(x) \in L_{2/\alpha}(\mathbf{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$u(x) + F\left[x,\ \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s) \cdot u(s)}{|s - x|^{1-\alpha}}\, ds\right] = f(x) \tag{40}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = u_{n-1} + \mu \cdot \left(F^{-1}(f - u_{n-1}) - B^\alpha u_{n-1}\right)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{41}$$

где $\mu = m/[M \cdot (m^{-1} + \|I^\alpha\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \cdot \|b\|^2_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}(f - u_0) - B^\alpha u_0\|_2\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{42}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m\,\mu/M^2}$, а $u_0(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ - произвольная функция.

Доказательство. Запишем уравнение (40) в операторном виде

$$u + FB^{\alpha}u = f\,. \tag{43}$$

В силу теоремы 5 оно имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$. Осталось доказать, что последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (42). Для этого обозначим $f - u = v$. Тогда уравнение (43) примет вид $FB^{\alpha}(f - v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого установлено в доказательстве теоремы 8, приходим к уравнению вида (36):

$$Av = B^{\alpha}f\,, \quad \text{где} \quad Av \equiv F^{-1}v + B^{\alpha}v\,. \tag{44}$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 8, получаем, что уравнение (44) имеет единственное решение $v^*(x) = f(x) - u^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$, причем последовательность

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1} - \mu \cdot (Av_{n-1} - B^{\alpha}f) = \\ &= v_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1}v_{n-1} + B^{\alpha}v_{n-1} - B^{\alpha}f) \end{aligned} \tag{45}$$

сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + B^{\alpha}v_0 - B^{\alpha}f\|_2\,. \tag{46}$$

Но тогда $u^*(x) = f(x) - v^*(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ является (единственным) решением уравнения (43) и, в силу связи $v_n = f - u_n$, из (45) и (46) получаем

$$f - u_n = f - u_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1}(f - u_{n-1}) - B^{\alpha}u_{n-1})\,,$$

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}(f - u_0) - B^{\alpha}u_0\|_2\,,$$

т.е. справедливы утверждения (41) и (42).

В заключение отметим, что результаты данной работы при $p = 2$ охватывают, в частности, и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Литература

1. K.F. Andersen, E.T. Sawyer. Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. V. 308, N 2. 1988. P. 547-558.

2. Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов. Весовые оценки операторов Римана-Лиувилля и приложения // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 243. 2003. С. 289-312.

3. С.Н. Асхабов. Нелинейные уравнения типа свертки, М: Физматлит. 2009. 304 с.

4. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение, М: Физматлит. 2003. 272 с.

5. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

6. М.М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М: Наука. 1966. 672 с.

7. Б.В. Хведелидзе. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Труды Тбилис. матем. ин-та АН Груз. ССР. Т. 23. 1956. С. 3-158.

INTEGRAL EQUATIONS WITH POTENTIAL TYPE KERNELS IN WEIGHTED COMPLEX LEBESGUE SPACES

S.N. Askhabov

Chechen State University,
Kiev str., 33, Grozny, 364037, Russia, e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract. By method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and methods of finding solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in weighted complex Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

Keywords: nonlinear integral equations, potential type operators, weighted Lebesgue spaces, method of monotone operators.

УДК 621.396

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Ю.П. Вирченко,[1] А.С. Мазманишвили[2]

[1] Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
[2] Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2 , г. Сумы,40007, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Изучается задача вычисления плотности $p(\varepsilon)$ распределения вероятностей случайных значений квадратичного функционала от траекторий многомерного случайного процесса Орнштейна-Уленбека в $\mathbb{C}^d$. Получено представление этой плотности распределения в виде разложения по экспоненциальным функциям $\exp(-\lambda_n\varepsilon)$, $n\in\mathbb{N}$, где $\{\lambda_n; n\in\mathbb{N}\}$ – спектр собственных значений корреляционного оператора этого процесса. Оно генерируется представлением плотности $p(\varepsilon)$ в виде бесконечной последовательности свёрток экспоненциальных распределений.

Ключевые слова: процесс Орнштейна-Уленбека, корреляционный оператор, квадратичный функционал, разложение Адамара, экспоненциальное разложение.

1. Введение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть векторный процесс Орнштейна-Уленбека определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dz(t) \;=\; Az(t)dt + dw(t)\,, \tag{1}$$

где процесс $\langle z(t); t\in\mathbb{R}\rangle$ принимает значения в $\mathbb{C}^d$; A — диссипативная $d\times d$ матрица; $w(t)$ — d-мерный комплекснозначный винеровский процесс с вещественной и симметричной ковариационной $d\times d$–матрицей D, т.е.

$$\langle w(t)\otimes w(t)\rangle \;=\; D\min(t,t')\,. \tag{2}$$

Пусть, кроме того, задан положительно определенный квадратичный функционал

$$J_{\mathrm{T}}[z] \;=\; \int\limits_0^T (z(t), Vz(t))dt\,, \tag{3}$$

где V — заданная самосопряженная, неотрицательная $d\times d$-матрица; $V^+ = V$ (здесь и ниже знак $^+$ означает эрмитовское сопряжение); T — действительный положительный параметр, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$.

Введём в рассмотрение распределение вероятностей случайных значений функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$

$$\mathrm{P}(\varepsilon) \;=\; \mathrm{Pr}\{z(t)\,:\, J_{\mathrm{T}}[z]\le\varepsilon\} \tag{4}$$

от траекторий $z(t)$, которое зависит от T и матриц A, D, V. Это распределение, очевидным образом, обладает плотностью $p(\varepsilon)$. Настоящая работа посвящена изучению плотности $p(\varepsilon)$, а именно, получению представления этой плотности в виде следующего разложения

$$p(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\lambda_m\right) \,,$$

$\langle \lambda_m > 0; m \in \mathbb{N} \rangle$ – неограниченно возрастающая, неубывающая последовательность, $\langle a_m \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{N} \rangle$ с $a_1 > 0$. Это разложение сходится при любом положительном ε, причём оно сходится равномерно на полуоси $[\delta, \infty)$ при $\delta > 0$.

Уточним смысл математических объектов, определяющих постановку задачи. Символом $\langle . \rangle$ ниже мы обозначаем математическое ожидание по вероятностной мере случайного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$.

Комплекснозначный гауссовский процесс $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ как функционал вида $z(t) = x(t) + iy(t)$ от траекторий пары гауссовских процессов $\langle \langle x(t); t \in \mathbb{R} \rangle, \langle y(t); t \in \mathbb{R} \rangle \rangle$, если для любой непрерывной, финитной комплекснозначной вектор-функции $v(s)$, $s \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение (все интегрирования, в которых не указаны пределы, выполняются по $\mathbb{R}$)

$$\left\langle \exp\left\{ i \,\mathrm{Re} \int (v(s), z(s))\, ds \right\} \right\rangle =$$

$$= \exp\left\{ i \,\mathrm{Re} \int (v(s), \langle z(s) \rangle)\, ds \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \int ds \int (v(s), G(s,s')v(s'), v(s))\, ds' \right\},$$

где комплекснозначная матриц-функция

$$G(t,t') \;=\; \frac{1}{2} \left\langle (z(s) - \langle z(s) \rangle) \otimes (z^*(s') - \langle z^*(s') \rangle) \right\rangle, \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

значениями которой являются комплексные $d \times d$-матрицы.

Отметим, что $G^+(t,t') = G(t',t)$ при $t, t' \in \mathbb{R}$ и, следовательно, интеграл

$$\int ds \int (v(s), G(s,s')v(s'))ds'$$

веществен и неотрицателен.

Для комплекснозначных гауссовских процессов математические ожидания

$$A(t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_{n'}) \;\equiv$$

$$\equiv\; \langle (z(t_1) - \langle z(t_1) \rangle) \otimes \ldots \otimes (z(t_n) - \langle z(t_n) \rangle) \otimes$$
$$\otimes\, (z^*(t'_1) - \langle z^*(t'_1) \rangle) \otimes \ldots \otimes (z^*(t'_{n'}) - \langle z^*(t'_{n'}) \rangle) \rangle \,.$$

отличны от нуля, только если $n = n'$, и при этом справедливо правило Вика [2]

$$A(t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_{n'}) \;=\; \sum_{\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^{n} 2G(t_j, t_{\mathsf{P}j}) \,,$$

где суммирование выполняется по всем элементам P группы перестановок $\mathbb{P}_n$ набора $\{1, \ldots, n\}$.

Комплекснозначным винеровским процессом $\langle w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ будем называть комплекснозначный гауссовский процесс, для траекторий $w(t)$ которого случайные процессы $\langle x(t) = \operatorname{Re} w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ и $\langle y(t) = \operatorname{Im} w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ – стохастически эквивалентные и независимые d-мерные винеровские процессы, начинающиеся в $x(0) = y(0) = 0$ и обладающие общей для них ковариационной $d \times d$-матрицей $D = D^+$, $\langle x(t) \otimes x(t')\rangle = \langle y(t) \otimes y(t')\rangle = \dfrac{1}{2} D \min(t, t')$. Эти свойства процессов $\langle x(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ и $\langle y(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ являются необходимыми для гауссовости процесса $\langle w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$.

Мера стационарного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ получается из меры случайного процесса $\langle z(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ – решения стохастического уравнения (1) с начальным условием $z(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}$ предельным переходом $t_0 \to -\infty$. Эта мера не зависит от выбора начального значения z'.

Замечание 1 Распределение вероятностей для вещественного случайного процесса $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ Орнштейна–Уленбека в пространстве $\mathbb{R}^d$, определяемого уравнением

$$dx(t) = Ax(t)\, dt + dw(t)$$

и вещественными матрицами A, D, V (A – гурвицева, а D, V – симметричны), нельзя получить из распределения вероятностей комплекснозначного процесса посредством стремления к нулю статистических характеристик процесса $\langle \mathrm{Im} z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, что, заведомо, бессмысленно, так как процессы $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle y(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ связаны условием совпадения их статистических характеристик.

Однако, вещественный процесс $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ можно комплексифицировать, вводя компексонзначный функционал $z(t) = x(t) + iy(t)$, где процесс $\langle y(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, стохастически эквивалентный процессу $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ и стохастически независимый от него. Тогда имеется очевидная связь между характеристической функцией $Q(i\lambda; z)$ случайной величины (4) и характеристической функцией $Q(i\lambda; x)$ соответствующей вещественной случайной величины (точное определение см.(15)), а именно,

$$Q(i\lambda, z) \;=\; Q^2(i\lambda, x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Замечание 2 Стохастический дифференциал в (1) мы понимаем по Стратоновичу [3], поскольку, в отличие от дифференциала Ито, он более отвечает физической ситуации [4,5], описываемой конструкцией (1-4).

Замечание 3 Ниже, при вычислении характеристической функции

$$Q(i\lambda, z) = \langle \exp(-i\lambda J_{\mathrm{T}}[z])\rangle\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

неотрицательность матрицы V не используется. Требование неотрицательности этой матрицы продиктовано соображениями значимости этого случая для приложений.

Замечание 4 Так как траектории винеровского процесса непрерывны с вероятностью единица [6], то траектории процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ также непрерывны с той же вероятностью, поэтому интеграл в определении (3) можно понимать как обычный интеграл Римана. Действительно, уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$z(t) = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Az(s)ds + w(t)\,, \tag{6}$$

которое имеет единственное решение в $[C(0,T)]^{2d}$, в чем можно убедиться последовательными итерациями.

2. Предельная плотность стационарного процесса Орнштейна–Уленбека

Рассмотрим условную плотность $p(z,z_0;t)$ распределения вероятностей перехода из точки $z(t_0)=z_0$ в точку $z(t)=z$:

$$p(z,z_0;t)=\left[(2\pi)^d \det D(t)\right]^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(z-\mathrm{e}^{At}z_0\right), D^{-1}(t)\left(z-\mathrm{e}^{At}z_0\right)\right)\right\}, \qquad (7)$$

$$D(t) \;=\; \int\limits_0^t \exp(As)D\exp(A^+s)ds\,. \qquad (8)$$

Такое представление для плотности $p(z,z_0;t)$ предполагает, что $\det D(t)\neq 0$.

Лемма *Если для некоторого $t>0$ имеет место $\det D(t)\neq 0$, то существует нетривиальное подпространство $H\subset \ker D$, инвариантное относительно A^+, и обратно, если такое подпространство существует, то для всех $t>0$ выполняется $\det D(t)=0$.*

□ Если $\det D(t)=0$, то существует вектор z такой, что

$$(z,D(t)z) \;=\; \int\limits_0^t \left(\exp(A^+s)z, D\exp(A^+s)z\right)ds=0\,.$$

Поскольку $D\geq 0$ и, следовательно, $\exp(As)D\exp(A^+s)\geq 0$, $(\exp(A^+s)z, D\exp(A^+s)z)=0$. Это означает, что $\exp(A^+s)z=0$ при почти всех $s\in[0,t]$, а так как эта вектор-функция непрерывна по s, то равенство нулю имеет место при всех $s\in[0,t]$. В частности, при $s=0$, $Dz=0$, $z\in\ker D$, а также для любого натурального n, $D(A^+)^n z=0$, $(A^+)^n z\in\ker D$. Тогда минимальное подпространство $H\subset\ker D$, натянутое на $(A^+)^n z$, $n\in\mathbb{N}$, инвариантно относительно A^+. Доказательство второй части леммы очевидно. ■

Наличие подпространства $H\in\ker D$, инвариантного относительно A^+, означает, что существует неособенная матрица W, действием которой в $\mathbb{C}^d$ можно представить уравнение (1) в виде двух несвязанных уравнений такого же типа во взаимно ортогональных пространствах H и $\bar{H}$. При этом уравнение в H уже не будет стохастическим. Таким образом, наличие подпространства H не изменяет наших дальнейших построений, так как его с помощью матрицы W можно исключить из рассмотрения. Однако такая процедура приводит к излишнему усложнению всех последующих построений. Конечный результат, как это будет видно ниже, не зависит от W. В связи с этим, далее будем пользоваться следующей регуляризацией задачи. Она состоит в таком изменении матриц A и D, которая обеспечивает отличие от нуля $\det D(t)$. В конце же вычислений, необходимо вернуться к первоначальным значениям этих матриц.

Утверждение 1 *Плотность распределения вероятностей (ПРВ)*

$$(2\pi)^{-d}(\det M)^{-d}\exp\left\{-\frac{1}{2}((z-Lz'),M^{-1}(z-Lz'))\right\} \qquad (9)$$

непрерывно зависит от матриц L и M и имеет слабый предел при $\det M \to 0$.

□ Доказательству подлежит только вторая часть утверждения. Если $M \to M_0$, $\det M_0 = 0$ и $H = \ker M_0$, то, в смысле вычисления математического ожидания любой непрерывной функции $f(z)$ случайной величины z, плотность (9) стремится к

$$(2\pi)^{-d+\dim H}(\det \bar{M}_0)^{-1}\delta\left(P_H(z-Lz')\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(P_{\bar{H}}(z-Lz'), \bar{M}_0^{-1}P_{\bar{H}}(z-Lz')\right)\right\}, \tag{10}$$

где P_H – проектор на H и $\bar{M}_0$ – сужение оператора M_0 на $\bar{H}$, $\delta(\cdot)$ – обобщённая функция Дирака. ■

Дадим теперь ответ на вопрос, поставленный в начале раздела. Для этого рассмотрим ПРВ (7) в регуляризованном случае, когда $\det D(t) \neq 0$.

Утверждение 2 *Для существования предела $p(z, z'; t)$ при $t \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы матрица A^+ была диссипативной. Это означает, что в жордановом каноническом представлении оператора A диагональные элементы имеют отрицательную реальную часть.*

□ Необходимо, чтобы существовал $\lim \exp(A^+t)\,z$, $t \to \infty$, для всех векторов z. Из представления Данфорда [7] $A^+ = B + N$, $[B, N] = 0$, где B – оператор скалярного типа, N – нильпотентный оператор, немедленно следует, что

$$\exp(A^+t) \;=\; \exp(Bt)\cdot \mathcal{P}(t)\,,$$

где $\mathcal{P}(t)$ – полином от t. В связи с этим, собственные числа μ_i, $i = 1 \div d$ матрицы B должны иметь отрицательную реальную часть. Кроме того, из $\operatorname{Re}\mu_i < 0$, $i = 1 \div d$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} D(t)$.

3. Корреляционная функция процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$

Заметим, что построенный в предыдущем разделе стационарный процесс – гауссовский, так как он является пределом при $t \to -\infty$ последовательности гауссовских процессов $\langle z(t, t_0); t \in [t_0, \infty]\rangle$, определенных уравнением (1) и фиксированным начальным условием $z(t_0) = z_0$, которое статистически не зависит от $w(t)$. Гауссовость процессов из этой последовательности устанавливается вычислением характеристического функционала

$$G[v(t)] \;=\; \left\langle\left\{ i\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t}(v(s), z(s))\,ds\right\}\right\rangle, \tag{11}$$

где $v(s)$ – произвольная финитная непрерывная функция на $s \in [t_0, t]$ со значениями в $\mathbb{C}^d$. Подстановка в (11) решения уравнения (1) даёт

$$G[(v(t)] \;=\; \exp\left\{ i\int\limits_{t_0}^{t}\, (\exp[(s-t_0)A]v(s),\, z(t_0))\,ds\right\} G'\,,$$

а математическое ожидание G' имеет вид

$$G' = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{\alpha}\left|\int_{s'}^{t}\left(v(s)\mathrm{e}^{A(s-s')}\right)_{\alpha}ds\right|^2 ds'\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}ds_1\int_{t_0}^{t}(v(s_1), g(s_1,s_2)v(s_2))ds_2\right\}, \qquad (12)$$

при этом матричное ядро $g(s_1, s_2)$ определяется формулой

$$g(s_1,s_2) = \int_{\min(s_1,s_2)}^{t} \exp[A(s_1-s')]\,\exp[A^+(s_2-s')]ds'\,.$$

Гауссовость $\langle z(t,t_0); t \in [t_0,\infty)\rangle$ непосредственно видна из (12).

Найдем теперь корреляционную функцию $K_{\alpha\beta}(t,t') = \langle z_\alpha(t)z^*_\beta(t')\rangle$, которая, вследствие гауссовости процесса $\langle z(t); t\in\mathbb{R}\rangle$, полностью его определяет.

Утверждение 3 *Корреляционная функция $K_{\alpha\beta}(t,t')$ определяется формулой*

$$K_{\alpha\beta}(t,t') \;=\; \theta(t-t')\left(\mathrm{e}^{A(t-t')}K\right)_{\alpha\beta} + \theta(t'-t)\left(K\mathrm{e}^{A^+(t'-t)}\right)_{\alpha\beta}, \qquad (13)$$

где $\alpha,\beta = 1 \div d$; $\theta(t)$ – функция Хевисайда; матрица K удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$AK + KA^+ \;=\; -D\,. \qquad (14)$$

□ Согласно определению, дифференциал Стратоновича

$$\langle z_\alpha(t)\,dw^*_\beta(t)\rangle = \frac{1}{2}D_{\alpha\beta}dt\,.$$

Поэтому независящая от t (в силу стационарности процесса $\langle z_\alpha(s); s\in\mathbb{R}\rangle$) матрица $K_{\alpha\beta}(t,t)\equiv K_{\alpha\beta}$ может быть вычислена на основе уравнения (1)

$$\langle z_\alpha(t)(Az(t))^*_\beta\,dt\rangle \;+\; \langle (Az(t))_\alpha z^*_\beta(t)\,dt\rangle \;+$$

$$=\; \langle z_\alpha(t)\,dw^*_\beta(t)\rangle \;+\; \langle dw_\alpha(t)\,z^*_\beta(t)\rangle \;=$$

$$=\; \langle z_\alpha(t)\,dz^*_\beta(t)\rangle \;+\; \langle dz_\alpha(t)\,z^*_\beta(t)\rangle \;=\; 0\,,$$

что эквивалентно уравнению (14). Наконец, усредняя уравнение (1), умноженное на $z^*(t')$, получаем (при $t > t'$)

$$\frac{d}{dt}K_{\alpha\beta}(t,t') \;=\; A_{\alpha\gamma}K_{\gamma\beta}(t,t')\,,$$

так как при $t > t'$ благодаря статистической независимости $\langle dw_\alpha(t)z^*_\beta(t')\rangle = 0$. Отсюда следует часть утверждения (3) при $t > t'$. Случай $t < t'$ рассматривается аналогично. ■

Замечание 5 Ввиду диссипативности матрицы A, уравнение (14) имеет единственное решение, так как в этом случае из него вытекает следующее интегральное представление для матрицы K

$$K = \int_0^\infty \exp(At) D \exp(A^+ t) dt \,,$$

которое показывает, что $K^+ = K$, и поскольку K является пределом при $t \to \infty$ монотонно возрастающей матричной функции $D(t)$ (см. (8)), то $\det K \neq 0$.

4. Производящая функция $Q(\lambda, z)$ функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$

Целью настоящего раздела будет вычисление следующего математического ожидания

$$Q(\lambda, z) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_{\mathrm{T}}[z]\right) \right\rangle . \tag{15}$$

Вычисление производящей функции $Q(\lambda, z)$ осуществим, методом Карунена-Лоэва [6,8], который основан на следующем утверждении.

Теорема (Карунен–Лоэв)

Пусть $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ — стационарный гауссовский процесс со значениями в $\mathbb{C}^d$ и $K_{\alpha\beta}(t, t')$, $\alpha, \beta = 1 \div d$, $t, t' \in \mathbb{R}$ суть его корреляционная функция; $e_n(t)$ — неслучайные собственные вектор-функции интегрального оператора с матриц-ядром $K_{\alpha\beta}(t, t')$ и λ_n – соответствующие им собственные числа;

$$e_n(t) \;=\; \lambda_n \int_0^T K(t, t')\, e_n(t') dt' \,, \quad n \in \mathbb{N} \,. \tag{16}$$

Тогда для случайных траекторий $z(t)$ процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ справедливо сходящееся с вероятностью единица разложение Фурье

$$z(t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} z_n e_n(t) \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \tag{17}$$

где случайные коэффициенты z_n – комплексные статистически независимые величины такие, что каждая из них имеет плотность распределения вероятностей

$$\rho_n(z_n) \;=\; \left(\frac{\lambda_n}{2\pi}\right) \exp\left(-\lambda_n |z_n|^2/2\right) \,, \quad n \in \mathbb{N} \,. \tag{18}$$

Сформулированное утверждение справедливо тогда, когда отсутствуют нулевые собственные функции $e_m(t)$, для которых

$$\int_0^T K(t, t')\, e_m(t')\, dt' \;=\; 0 \,,$$

так как в противном случае необходимо положить $\lambda_m = \infty$ и $\rho_m(z_m) = \delta(z_m)$. Можно показать, что для ядра (13) указанное условие сводится к требованию отсутствия нетривиального подпространства $H \subset \ker D$, $H = \mathrm{inv} A^+$, либо, что эквивалентно, $\ker K = 0$.

Последнее условие в дальнейшем будем предполагать выполненным. В противном случае, всегда можно добиться его выполнимости посредством регуляризации распределения вероятностей случайного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$.

Доказательство теоремы приведено в [6].

Воспользовавшись функциями

$$p_n(t) \ = \ \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} K e_n(s)\, ds \,, \qquad q_n(t) \ = \ \int_t^T \mathrm{e}^{A^+(s-t)} e_n(s)\, ds \,, \tag{19}$$

уравнение (16) с ядром (13) запишем в виде

$$e_n(t) \ = \ \lambda_n \left(p_n(t) + K q_n(t) \right) \,.$$

С помощью этого соотношения и определения (19) найдем дифференциальное уравнение для вектора $\langle p_n(t), q_n(t) \rangle$ в пространстве $\mathbb{C}^{2d}$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} \ = \ H \begin{pmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} \,, \tag{20}$$

при этом оператор H в $\mathbb{C}^{2d}$ имеет следующую матричную структуру:

$$H \ = \ \begin{pmatrix} A + \lambda_n K & \lambda_n K^2 \\ -\lambda_n & -A^+ - \lambda_n K \end{pmatrix} \,. \tag{21}$$

Здесь в блоках матрицы H указаны операторы, действующие в $\mathbb{C}^d$. Кроме того, функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ удовлетворяют, вследствие определения (19), граничным условиям

$$p_n(0) \ = \ 0 \,, \qquad\qquad q_n(T) \ = \ 0 \,. \tag{22}$$

Легко видеть, что задача об определении собственных чисел и собственных функций, отвечающих ядру (13), при связи (19), эквивалентна решению краевой задачи (20)–(22). Решение этой краевой задачи выражается в терминах матрицы $\exp(Ht)$ и поэтому, ввиду (22),

$$\begin{pmatrix} p_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \exp(Ht) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_n(0) \end{pmatrix} \,. \tag{23}$$

Представим теперь $\exp(Ht)$ в виде

$$\exp(Ht) = \begin{pmatrix} E_1(\lambda_n, t) & E_2(\lambda_n, t) \\ E_3(\lambda_n, t) & E_4(\lambda_n, t) \end{pmatrix} \,, \tag{24}$$

где $E_k(\lambda, t)$, $k = 1, 2, 3, 4$ – операторы, действующие в $\mathbb{C}^d$ и функционально зависимые от параметров λ и t. Тогда для существования нетривиального решения краевой задачи при фиксированном λ, необходимо и достаточно существование нетривиального решения однородного уравнения

$$E_4(\lambda, t)\, q_n(0) \ = \ 0 \,, \tag{25}$$

что непосредственно следует из (23). Отсюда вытекает, что уравнение

$$\Phi_d(\lambda, T) \ \equiv \ \det E_4(\lambda, T) \ = \ 0 \tag{26}$$

определяет спектр собственных значений $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ интегрального уравнения (16) с ядром (13).

Отметим, что в отличие от случая $d = 1$ [9] нельзя гарантировать простоту спектра $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. Число собственных функций, отвечающих данному λ_n, равно $(d - \mathrm{rank} E_4(\lambda_n, T))$. То, что это число может принимать произвольное значение, не превышающее d, вытекает из следующего примера. В качестве исходной системы стохастических дифференциальных уравнений возьмем d статистически независимых экземпляров одного и того же процесса Орнштейна–Уленбека. Тогда $A = -\nu I$, $D = \sigma I$, где I – единичная матрица, и ν, $\sigma > 0$. В этом случае [10]

$$\Phi_1(\lambda, T) \; = \; r^{-1} \left[(r+\nu)^2 \exp(rT) - (r-\nu)^2 \exp(-rT) \right] , \tag{27}$$

$$r \; = \; (\nu^2 - \lambda\sigma)^{1/2} ,$$

откуда следует, что

$$\Phi_d(\lambda, T) \; = \; [\Phi_1(\lambda, T)]^d .$$

Таким образом, уравнение для собственных значений может иметь кратные корни. В связи с этим, вопрос о связи кратности каждого собственного значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$ с кратностью каждого из нулей уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ должен быть исследован дополнительно (см. Приложение 3). Ввиду того, что каждый нуль уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ является собственным значением ядра (13) и, обратно, равенство кратностей этих величин означает, что функция $\Phi_d(\lambda, T)$ пропорциональна детерминанту Фредгольма ядра $K(t, t')$. С целью получения аналитического выражения для $Q_T(\lambda, z)$ (15) будем считать, что равенство кратностей имеет место. Учтем прежде всего, что $\Phi_d(\xi, T)$ – целая функция ξ с нулями λ_n с учетом их кратности и не имеет никаких других нулей. Кроме того, эта функция имеет порядок роста меньший единицы (доказательство этого утверждения приведено в Приложении 2). Поэтому для неё справедливо сходящееся разложение Адамара

$$\Phi_d(\xi, T) \; = \; \mathrm{const} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\lambda_n} \right) . \tag{28}$$

Возвратимся теперь к определению (15) и учтем, что $z(t)$ – стационарный гауссовский процесс. Пусть сначала $V = I$. Используя теорему Карунена–Лоэва, получаем сходящееся с вероятностью единица разложение

$$\int_0^T \big(z(t), z(t) \big) \, dt \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 .$$

Тогда вычисление математического ожидания $\exp\left(-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)$ на основе плотностей (18) приводит к выражению

$$Q(\lambda, z) \; = \; \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2\lambda/\lambda_n)^{-1} , \tag{29}$$

т.е. существование производящей функции при $\mathrm{Re}\, \lambda \geq 0$ обусловлено сходимостью этого бесконечного произведения и тем, что $\lambda_n > 0$ (см. Приложение 1). Из сопоставления выражений (28) и (29) вытекает, что это произведение сходится и

$$Q(\lambda, z) \; = \; \mathrm{const} \, [\Phi_d(-2\lambda, T)]^{-1} .$$

Поскольку $Q(0,z)=1$, то получим окончательно

$$Q(\lambda,z) \;=\; \Phi_d(0,T)/\Phi_d(-2\lambda,T)\,. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь общий случай $V\neq I$. Будем считать $\det V\neq 0$, что не приводит к потере общности в силу непрерывной зависимости всех результирующих выражений от V. Пусть $V^{1/2}$ – некоторый фиксированный корень из матрицы V (конечный результат не будет зависеть от конкретного выбора вида $V^{1/2}$). Введем случайный процесс $\langle z_{_V}(t);t\in\mathbb{R}\rangle$, который индуцируется процессом $\langle z(t);t\in\mathbb{R}\rangle$ посредством формулы для его траекторий $z_{_V}(t)=V^{1/2}z(t)$ и многомерный винеровский процесс $\langle w_{_V}(t);t\in\mathbb{R}\rangle$ с траекториями $w_{_V}(t)=V^{1/2}w(t)$, имеющий ковариационную матрицу $D_{_V}=V^{1/2}DV^{1/2}$ и $D^+_{_V}=D_{_V}$. Так как матрица $A_{_V}=V^{1/2}AV^{-1/2}$ диссипативна и траектории $z_{_V}(t)$ удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} dz_{_V}(t) \;&=\; A_{_V}z_{_V}(t)\,dt \;+\; dw_{_V}(t)\,,\\ z_{_V}(t') = (z_{_V})_0\,, &\qquad t_0\to-\infty, \end{aligned} \tag{31}$$

то процесс $\langle z_{_V}(t);t\in\mathbb{R}\rangle$ так же, как и $\langle z(t);t\in\mathbb{R}\rangle$, является многомерным процессом Орнштейна–Уленбека. Из (15) вытекает

$$Q(\lambda,z_{_V}) \;=\; \left\langle \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T (z_{_V}(t),z_{_V}(t))\;dt\right\}\right\rangle_{_V}\,,$$

где символ $\langle.\rangle_{_V}$ означает усреднение по мере процесса $\langle z_{_V}(t);t\in\mathbb{R}\rangle$. Следовательно

$$Q(\lambda,z_{_V}) \;=\; \Phi_{Vd}(0,T)/\Phi_{Vd}(-2\lambda,T)\,. \tag{32}$$

Здесь $\Phi_{Vd}(\xi,T)=\det E_{V4}(\xi,T)$, $E_{V4}(\xi,T)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H_{_V}T)$ и

$$H_{_V} \;=\; \begin{pmatrix} A_{_V}+\xi K_{_V} & \xi K^2_{_V} \\ -\xi & -A^+_{_V}-\xi K_{_V}\end{pmatrix}\,. \tag{33}$$

а $K_{_V}$ – решение уравнения Ляпунова $A_{_V}K_{_V}+K_{_V}A^+_{_V}=-D_{_V}$, которое в силу (14) имеет вид $K_{_V}=V^{1/2}KV^{1/2}$. После простых преобразований находим $H_{_V}=UH(V)U^{-1}$,

$$U \;=\; \begin{pmatrix} V^{1/2} & 0 \\ 0 & V^{-1/2}\end{pmatrix}\,,$$

$$H(V) \;=\; \begin{pmatrix} A_{_V}+\xi KV & \xi KVK \\ -\xi V & -A^+-\xi VK\end{pmatrix}\,. \tag{34}$$

Тогда $\exp(H_{_V}T)\;=\;U\exp(H(V)T)U^{-1}$ и

$$E_{V4}(\xi,T) \;=\; V^{-1/2}E_4(\xi,T;V)V^{1/2}\,, \tag{35}$$

где $E_{V4}(\xi,T;V)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H(V)T)$. Поэтому на основании (32) можно записать

$$\begin{aligned} Q(\lambda,z) \;&=\; \Phi_d(0,T;V)/\Phi_d(-2\lambda,T;V)\,,\\ \Phi_d(\xi,T;V) \;&=\; \det E_4(\xi,T;V)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что в полученное выражение (36) матрица V везде входит в целых положительных степенях. Кроме того, в силу непрерывной зависимости от V выражения (36), оно также имеет место и при $\det V = 0$.

Замечание 6 Если W – неособенная матрица, $\det W \neq 0$, то, определив случайный процесс $\langle z'(t) = Wz(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, перейдем к эквивалентной задаче о вычислении математического ожидания, в которой

$$A \Rightarrow A' = WAW^{-1}\,, \qquad D \Rightarrow D' = WAW^{+}\,,$$

$$V \Rightarrow V' = (W^{+})^{-1}VW^{-1}\,, \qquad K \Rightarrow K' = WKW^{+}\,.$$

Тогда матрица H_{V} преобразуется в

$$H'_{V} \;=\; \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & (W^{-1})^{+} \end{pmatrix} H_{V} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{+} \end{pmatrix}\,,$$

и поэтому $E'_4 = (W^{+})^{-1}E_4W^{+}$. Следовательно, функция $\Phi_d(\lambda, T; V)$ при таком преобразовании не меняется. Выбирая подходящим образом W, например, такое, которое приводит A к жордановой форме, можно добиться, чтобы для всех z выполнялось $\mathrm{Re}(Az, z) < 0$.

5. Плотность распределения функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$

В этом разделе мы получим экспоненциальное разложение плотности $p(\varepsilon)$ распределения вероятностей (4). Исследуем прежде всего асимптотическое поведение собственных чисел $\{\lambda_m\}_1^\infty$ при $m \to \infty$.

Теорема *Пусть* $\det D\, \det V \neq 0$, *спектр* D_{V} *– простой. Тогда при* $m \to \infty$ *множество собственных чисел* $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ *распадается на* d *серий* $\{\lambda_{mk}\}$, $k = 1 \div d$ *с учетом их кратности, где*

$$\lambda_{mk} \;=\; \left(\frac{\pi m}{T}\,\delta_k^{-1/2} + O(1)\right)^2, \tag{37}$$

а $\{\delta_k; k = 1 \div d\}$ *– собственные числа матрицы* VD *(либо, что то же самое, матрицы* DV*).*

□ Заметим, что на основании уравнений (П12), (П13)

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) \;&=\; i\sqrt{\lambda}D_{V}^{1/2} \;+\; O(1)\,, \\ R_2(\lambda) \;&=\; i\sqrt{\lambda}D_{V}^{1/2} \;+\; O(1)\,, \\ S(\lambda) \;&=\; -i\,(2\sqrt{\lambda})^{-1}D_{V}^{-1/2} \;+\; O(\lambda^{-1})\,, \qquad \lambda \to \infty, \end{aligned} \tag{38}$$

При этом выбор корня $D_{V}^{1/2}$ обусловлен выбором решений в (П12). Конкретизация этого выбора не влияет на асимптотическое поведение $\langle \lambda_m; m \in \mathbb{N}\rangle$. Ввиду соотношений (38) матрица $\lambda^{-1/2}R_1(\lambda)$ при больших значениях λ является матрицей скалярного типа, так как спектр D_{V} – простой. Таким образом, матрица $R_1(\lambda)$ имеет спектральное разложение

$$R_1(\lambda) \;=\; \lambda^{1/2}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^{(1)}(\lambda)I_k(\lambda)\,, \tag{39}$$

где собственные числа $\theta_k^{(1)}(\lambda)$ и соответствующие проекционные операторы $I_k(\lambda)$, $k = 1 \div d$ имеют, в силу (38), асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \theta_k^{(1)}(\lambda) &= i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}), \\ I_k(\lambda) &= I_k + O(\lambda^{-1/2}), \end{aligned} \tag{40}$$

а I_k, $k = 1 \div d$ – проекторы на собственные векторы матрицы D_V. Аналогичное рассуждение справедливо для матрицы $R_2(\lambda)$. Из формулы (39) имеем

$$\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \sum_{k=1}^{d} \exp\left(\sqrt{\lambda}\,\theta_k^{(1)}(\lambda)T\right) \cdot I_k(\lambda)$$

и поэтому

$$\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \exp\left(\tilde{R}_1(\lambda)T\right) + o(1), \tag{41}$$

где

$$\tilde{R}_1(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum_{k=1}^{d} \theta_k^{(1)}(\lambda) I_k, \qquad \left[\tilde{R}_1(\lambda), D_V\right] = 0.$$

Для оператора $R_2(\lambda)$ справедлива формула, аналогичная (41),

$$\exp\left(-R_2(\lambda)T\right) = \exp\left(-\tilde{R}_2(\lambda)T\right) + o(1), \tag{42}$$

где

$$\tilde{R}_2(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum_{k=1}^{d} \theta_k^{(2)}(\lambda) I_k, \quad [\tilde{R}_2(\lambda), D_V] = 0, \quad \theta_k^{(2)}(\lambda) = i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}). \tag{43}$$

Найдем теперь асимптотику матричных элементов матрицы $E_4(\lambda, T; V)$. Из (П14) и формул (38)–(43) получаем

$$E_4(\lambda, T; V) = V^{1/2}\left\{\exp(-\tilde{R}_2(\lambda)T) - \exp(\tilde{R}_1(\lambda)T)\right\} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2i} D_V^{-1/2} K_V V^{-1/2} + O(1). \tag{44}$$

Тогда, уравнение для собственных чисел $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$, $\lambda^{-d/2}\Phi_d(\lambda, T; V) = 0$, согласно (44), представим в виде

$$\det\left[\exp(-\tilde{R}_2(\lambda)T) - \exp(\tilde{R}_1(\lambda)T)\right] + o(1) = 0,$$

так как произведение $\det D \cdot \det V$ отлично от нуля. Поскольку $\lambda_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то из этого уравнения следует, что можно указать такие $\lambda_m^{(0)}$ такие, что при больших m имеет место асимптотическое соотношение $\lambda_m = \lambda_m^{(0)} + o(1)$. При этом числа $\lambda_m^{(0)}$, $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{k=1}^{d} \left[\exp(T\sqrt{\lambda}\theta_k^{(1)}(\lambda)) - \exp(-T\sqrt{\lambda}\theta_k^{(2)}(\lambda))\right] = 0.$$

Тогда, все $\lambda_m^{(0)}$, $m \in \mathbb{N}$ распадаются на d серий $\lambda_{mk}^{(0)}$, $k = 1 \div d$ с учетом их кратности, т.е.

$$\lambda_{mk}^{(0)} = \left(\frac{\pi m}{T}\delta_k^{-1/2} + O(1)\right)^2, \qquad m \to \infty,$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Следствие *Интегральный оператор с ядром (13) является оператором Гильберта–Шмидта, так как*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} < \infty. \tag{45}$$

Согласно определению (15) плотность распределения вероятностей $p(\varepsilon)$ является обратным преобразованием Лапласа от функции $Q(\lambda)$

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Q(\lambda)\, \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} d\lambda. \tag{46}$$

Поскольку интеграл

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_m}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} d\lambda$$

сходится равномерно относительно n на обоих пределах интегрирования и на каждом компакте в $(-i\infty, i\infty)$ и сходимость бесконечного произведения в (29) в силу (45) равномерна по λ, то

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_m}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Res}\left[Q(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon}\right]\Big|_{\lambda=-\lambda_m/2}.$$

Отсюда следует экспоненциальное разложение плотности $p(\varepsilon)$,

$$p(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\frac{1}{2}\,\varepsilon\lambda_m\right), \tag{47}$$

где

$$a_m = \left(\frac{\lambda_m}{2}\right)^{l_m} \sum_{k=0}^{l_m-1} \binom{l_m - 1}{k} \varepsilon^{l_m-k-1} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} Q_m(\lambda)\right)_{\lambda=-\lambda_m/2}$$

и

$$Q_m(\lambda) = \prod_{n=1,\ n\neq m}^{\infty} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Здесь l_m — кратность точки спектра λ_m, $m \in \mathbb{N}$. Если спектр $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ – простой, то набор коэффициентов $\{a_m; m \in \mathbb{N}\}$ обладает свойством знакочередуемости,

$$a_m = (-1)^{m-1}\left|\mathrm{Res}\, Q_m(\lambda)\right|_{\lambda=-\lambda_m/2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Полученное разложение для плотности $p(\varepsilon)$ определяет её асимптотику при $\varepsilon \to \infty$.

Теорема *Если* $\det D \cdot \det V \neq 0$, *то при любом* $\delta > 0$ *для* $\varepsilon \geq \delta$ *ряд (47) сходится равномерно и абсолютно и, следовательно, при* $\varepsilon \to \infty$ *имеет место*

$$p(\varepsilon) \ = \ a_1 \exp(-\lambda_1 \varepsilon/2) + O\left(\mathrm{e}^{-\lambda_2 \varepsilon/2}\right) . \tag{48}$$

□ Утверждение теоремы немедленно вытекает из (37) и следующей равномерной по $m \in \mathbb{N}$ оценки на коэффициенты $\{a_m; m \in \mathbb{N}\}$

$$|a_m| \ \leq \ \mathrm{const}\, \varepsilon^{d-1} , \qquad \varepsilon \to \infty, . \tag{49}$$

Доказательство этой оценки состоит в следующем. Каждая k-ая серия $k = 1 \div d$ коэффициентов $\{a_{mk}; m \in \mathbb{N}\}$ соответствует k-ой серии собственных чисел $\{\lambda_{mk}; m \in \mathbb{N}\}$. Сначала допустим, что асимптотически все нули $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ – простые. Общий случай может быть получен с помощью предельного перехода, который может приводить к совпадению некоторых из чисел δ_k, $k = 1 \div d$. В случае простоты нулей, имеем

$$a_{mk} \ = \ \Phi_d(0, T; V) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_d(-2\lambda, T; V) \right]^{-1} \Bigg|_{\lambda = -\lambda_{m,k}/2} , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Согласно (44)

$$\Phi_d(\lambda, T; V) \ = \ \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2i} \right)^d \det K \cdot \left(\frac{\det V}{\det D} \right)^{1/2} \ \times$$

$$\times \ \prod_{k=1}^{d} \left[\exp\left(-\theta_k^{(2)}(\lambda) T \right) - \exp\left(\theta_k^{(1)}(\lambda) T \right) \right] \ + \ O\left(\lambda^{(d-1)/2} \right) .$$

Поскольку возможно дифференцирование этого асимптотического разложения, найдем производную $\partial \Phi_d(-2\lambda, T; V)/\partial \lambda$ в точке $\lambda = -\lambda_{mk}/2$. Тогда, при $m \to \infty$, для всех $k = 1 \div d$, имеет место

$$a_{mk} \ = \ \mathrm{const}\, (-1)^m \left\{ \sqrt{\delta_k} \left(\frac{m}{\sqrt{\delta_k}} \right)^{d-1} \prod_{j=1,\ j \neq k}^{d} \sin\left(\frac{\pi m \sqrt{\delta_j}}{\sqrt{\delta_k}} + O(1) \right) \ + \ O(m^{d-2}) \right\}^{-1} .$$

Из этой формулы и (47) следует, что коэффициенты a_m, $m \in \mathbb{N}$ ведут себя при $m \to \infty$ наихудшим образом в том случае, когда все собственные числа δ_k, $k = 1 \div d$ совпадают. Полагая все δ_k, $k = 1 \div d$ равными друг к другу, при вычислении коэффициентов a_m приходится вычислять d-кратный вычет для каждого $m \in \mathbb{N}$. Величина этого вычета удовлетворяет оценке (49). ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем положительность собственных чисел $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ ядра (13).

Теорема *Пусть правая часть равенства (16) не равна тождественно нулю, т.е.* $\ker K = 0$. *Тогда собственные числа* $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ *положительны.*

□ Введем вектор $f(t) = K^{1/2} e_n(t)$ и матрицу $\tilde{A} = K^{-1/2} A K^{1/2}$. Воспользуемся равенством

$$\theta(t)\exp(\tilde{A}t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t}(i\omega - \tilde{A})^{-1} d\omega\,, \tag{1}$$

которое является следствием интегрального представления Данфорда-Рисса для матричных аналитических функций [7], и тем, что реальная часть собственных чисел матрицы $\tilde{A}$ меньше нуля (так же, как и матрицы A в силу её диссипативности). Тогда на основе (16) получим неравенство

$$0 \;<\; \int_0^T (e_n(t), e_n(t))\; dt \;= \tag{2}$$

$$= \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^T dt \int_0^T \Big(f_n(t), \Big[\mathrm{e}^{i\omega(t-t')}(i\omega - \tilde{A})^{-1} + \mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}(i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1} \Big] f(t') \Big)\, dt'.$$

Введем теперь вектор

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^T \mathrm{e}^{-i\omega t} f(t) dt\,.$$

Тогда из (П2) следует

$$0 \;<\; \int_0^T (e_n(t), e_n(t))\; dt \;=$$

$$= \;\frac{\lambda_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\tilde{f}_n(\omega), \Big[(i\omega - \tilde{A})^{-1} - (i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1} \Big]\; \tilde{f}(\omega) \Big)\, d\omega \;= \tag{3}$$

$$= \;-\frac{\lambda_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big((i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega),\, (\tilde{A} + \tilde{A}^{+})(i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega) \Big)\, d\omega\,.$$

Так как $\tilde{A} + \tilde{A}^{+} = K^{-1/2}(AK + KA^{+})K^{-1/2} = -K^{-1/2} D K^{1/2} < 0$, то все числа λ_n положительны, кроме того возможного случая, когда интеграл в правой части (П3) строго равен нулю. Но в этом случае, для почти всех ω,

$$(i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega) = 0\,,$$

и поэтому, для почти всех t,

$$f(t) = K^{1/2} e_n(t) = 0\,,$$

т.е. $e_n(t) \in \ker K$, что не имеет места по условиям теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценим порядок роста функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Поскольку нам потребуется явное выражение для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$, представим резольвенту оператора $H_{_V}$ (32) в виде

$$(\xi - H_{_V})^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} G_1(\xi) & G_2(\xi) \\ G_3(\xi) & G_4(\xi) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда на основании операторного исчисления Данфорда-Рисса и определения матрицы $E_4(\lambda, T; V)$ следует

$$E_4(\lambda, T; V) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint G_4(\xi)\, e^{\xi T} d\xi\,. \tag{5}$$

При этом контур интегрирования должен охватывать все собственные числа матрицы $H_{_V}$. Из (П4) вытекает, что

$$G_4(\xi) \;=\; \left[(\xi + A^+ + \lambda V K) + \lambda^2 V(\xi - A - \lambda K V)^{-1} K V K\right]^{-1}. \tag{6}$$

Как и ранее, будем предполагать, что $\det V \neq 0$. Поэтому рассмотрим оператор $G_{4V}(\xi) = V^{-1/2} G_4(\xi) V^{1/2}$, такое преобразование оставляет неизменным функцию $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Из (П6) и уравнения Ляпунова для $K_{_V}$ следует

$$G_{4V} \;=\; \left[\xi^2 + \xi(A^+_{_V} - A_{_V}) - A_{_V} A^+_{_V} + \lambda D_{_V}\right]^{-1}(\xi - A_{_V} - \lambda K_{_V})\,. \tag{7}$$

Интеграл (П5) определяется вкладом полюсов, являющихся нулями полинома

$$\mathcal{P}(\xi) \;=\; \det\left[\xi^2 + \xi(A^+_{_V} - A_{_V}) - A_{_V} A^+_{_V} + \lambda D_{_V}\right]. \tag{8}$$

Нули этого полинома $\xi = \xi(\lambda)$ обладают следующим свойством инвариантности: $\xi \Rightarrow \xi^*(\lambda^*)$, что указывает на возможность считать их двумя наборами собственных чисел для двух матриц $R(\lambda)$ и $-R^+(\lambda^*)$. С целью нахождения этих матриц представим операторный полином

$$\hat{\mathcal{P}}(\xi) \;=\; \xi^2 + \xi(A^+_{_V} - A_{_V}) - A_{_V} A^+_{_V} + \lambda D_{_V} \tag{9}$$

в виде

$$\hat{\mathcal{P}}(\xi) \;=\; (\xi - R_1)(\xi + R_2)\,. \tag{10}$$

Для существования представления (П10) необходимо, чтобы матрицы R_1 и R_2 удовлетворяли уравнениям

$$R_2 - R_1 \;=\; A^+_{_V} - A_{_V}\,; \qquad R_1 R_2 \;=\; A^+_{_V} A_{_V} - \lambda D_{_V}\,, \tag{11}$$

из которых следует

$$\begin{aligned} R_1^2 + R_1\left(A^+_{_V} - A_{_V}\right) - A_{_V} A^+_{_V} + \lambda D_{_V} \;&=\; 0\,,\\ R_2^2 - \left(A^+_{_V} - A_{_V}\right) R_2 - A_{_V} A^+_{_V} + \lambda D_{_V} \;&=\; 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Известно [11], что каждое из этих уравнений разрешимо и, кроме того, каждое из решений является аналитической функцией от λ, обладающей конечным множеством особенностей. Выберем определенную ветвь решений для, например, $R_2 = R_2(\lambda)$. На основании обобщенной теоремы Безу [11] результат правого деления многочлена $\hat{\mathcal{P}}(\xi)$ на $(\xi + R_2)$ должен давать $(\xi - R_1)$, при этом ветвь R_1 автоматически согласовывается с выбранной выше ветвью R_2.

Выберем такие ветви матриц R_1 и R_2, которые при $\lambda \to 0$ имеют вид:

$$R_1 \ = \ A + \lambda K + o(\lambda)\,; \qquad R_2 \ = \ A^+ + \lambda K + o(\lambda)\,,$$

тогда для достаточно малых λ согласованные спектры матриц R_1 и $(-R_2)$ не пересекаются в силу диссипативности A. Поэтому при тех же λ однозначно разрешимо относительно оператора S следующее уравнение:

$$SR_1 + R_2 S \ = \ I\,. \tag{13}$$

Для построения аналитического продолжения матрицы $S = S(\lambda)$ покажем конечность набора Λ тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых происходит перекрытие спектров матриц R_1 и $(-R_2)$. Пусть λ_0 – граничная точка этого набора. Существует путь γ в плоскости комплексных значений λ, приводящий в точку λ_0 с обходом точек неаналитичности матриц $R_1(\lambda)$ и $R_2(\lambda)$. Из уравнений (П11), переходя вдоль пути γ к пределу $\lambda \to \lambda_0$, находим, что производная $dR_2/d\lambda$ в этой граничной точке не существует, поскольку уравнение для этой производной

$$R_1 \frac{dR_1}{d\lambda} \ + \ \frac{dR_2}{d\lambda} R_2 \ = \ -D_{_V}$$

при $\det D_{_V} \neq 0$ не разрешимо при $\lambda = \lambda_0$ из-за перекрытия спектров рассматриваемых матриц R_1 и $(-R_2)$. Поэтому $\lambda = \lambda_0$ – точка неаналитичности для матрицы $R_2(\lambda)$. Ввиду конечности набора точек неаналитичности этой матрицы, множество Λ совпадает с этим набором.

Найдем теперь искомое представление для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$. Благодаря однозначности решения уравнения (П13) для оператора S из (П10) следует

$$\hat{\mathcal{P}}^{-1}(\xi) = S(\xi - R_1)^{-1} - (\xi + R_2)^{-1} S\,.$$

Поэтому, в силу (П7) и (П9), получим после вычисления контурного интеграла в (П5)

$$\begin{aligned} E_{4V}(\lambda, T; V) \ &= \ V^{1/2}\big\{ \left[S \cdot \exp(R_1 T) \cdot R_1 + R_2 \cdot \exp(-R_2 T) \cdot S\right] \ + \\ &+ \ \left[\exp(-R_2 T) \cdot S - S \cdot \exp(R_1 T)\right] (A_{_V} + \lambda K_{_V})\big\} V^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценка порядка роста α функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$ находится на основе (П14),

$$\alpha \ = \ \lim_{R \to \infty} [\ln \ln \max_{|\lambda| = R} |\Phi_d(\lambda, T; V)| / \ln R]\,.$$

Для этого достаточно получить асимптотику при больших значениях $|\lambda|$ матриц R_1, R_2 и S. Из (П12) и (П13) вытекает, что при $\det V \neq 0$ имеет место

$$R_1(\lambda) \sim R_2(\lambda) \sim i(\lambda D_{_V})^{1/2}\,, \qquad S(\lambda) \sim \frac{1}{2i}(\lambda D_{_V})^{-1/2}\,, \quad |\lambda| \to \infty\,. \tag{15}$$

Поскольку $\Phi_d(\lambda, T; V) \leq d! \parallel E_4(\lambda, T; V) \parallel^d$, где норма понимается в смысле максимума матричных элементов, и

$$\parallel \exp(R_1 t) \parallel \leq 1 \ + \ d^{-1}[\exp(Td \parallel R_1 \parallel) - 1]\,,$$

то на основании (П15) можно заключить, что

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \tag{16}$$

для искомого порядка роста.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Докажем равенство кратностей κ'_n любого нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ и

$$\kappa_n = \dim\ker E_4(\lambda_n, t; V)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

При $d = 1$ это равенство доказывается непосредственно на основе явного представления (27) для $\Phi_1(\lambda, t; V)$.

Докажем предварительно простое утверждение, имея в виду общий случай $d \geq 1$, что кратность нуля λ_n не меньше, чем κ_n, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что содержание этого утверждения не связано с конкретной структурой матрицы E_4, а оно имеет место для произвольной матричной функции.

Приведем матрицу E_4 к жордановой матричной форме

$$E_4 = \begin{pmatrix} B_1 & & & & & \\ & B_2 & & 0 & & \\ & & B_3 & & & \\ & 0 & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & . \end{pmatrix}, \qquad B_i = \begin{pmatrix} \beta_i & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \beta_i & 1 & . & . \\ 0 & 0 & \beta_i & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & & & & \\ 0 & . & . & . & \beta_i \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\lambda, t)$ являются функциями λ и t. Число нулевых собственных векторов κ_n матрицы $E_4(\lambda_n, t; V)$ равно $\sum_m \dim B_{i_m}$, где суммирование осуществляется по тем i_m, для которых функция $\beta_{i_m}(\lambda, t)$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_n$. Если k_m – кратность нуля λ_n функции $\beta_{i_m}(\lambda, t)$, то кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ равна $\sum_m k_m \dim B_{i_m}$. Отсюда и вытекает указанное утверждение.

Теперь докажем обратное.

Утверждение *Кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ не превышает κ_n.*

$\square$ Введем пространство упорядоченных пар матриц $\mathcal{M} = \{(D, A)\}$ таких, что $D^+ = D$, $D > 0$ и A – диссипативна. Для того, чтобы подчеркнуть зависимость функций $\Phi_d(\lambda, t; V)$, $Q(\lambda, z)$ и матрицы $E_4(\lambda, t; V)$ от элементов пространства $\mathcal{M}$, введем обозначения

$$\Phi(\lambda|y) \equiv \Phi_d(\lambda, t; V)\,, \qquad Q(\lambda|y) \equiv Q(\lambda, z)\,, \qquad E(\lambda|y) \equiv E_4(\lambda, t; V)\,,$$

где $y \equiv (D, A)$.

Доказательство будем строить от противного. А именно, предположим, что не существует всюду плотного в $\mathcal{M}$ подмножества X такого, что при $y \in X$, для всех нулей λ_n, имеет место совпадение κ_n и κ'_n, где κ'_n – кратность нуля λ_n функции $\Phi(\lambda|y)$, где $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, при y, принадлежащих некоторому открытому подмножеству в $\mathcal{M}$, функция

$$\pi(\lambda|y) \;=\; \mathrm{const}\,\Phi(\lambda|y)\,Q\left(-\frac{\lambda}{2}\middle|\, y\right)$$

не равна тождественно 1, а является целой функцией λ, имеющей разложение Адамара. Если бы κ_n и κ'_n совпадали на всюду плотном в $\mathcal{M}$ подмножестве, то на этом подмножестве $\pi(\lambda|y) = 1$ и, используя непрерывность функций $\Phi(\lambda|y)$ и $Q(\lambda|y)$ по y, мы бы имели $\pi(\lambda|y) \equiv 1$. Будем считать, что набор нулей $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ всегда упорядочен по величине. Сопоставим каждой точке $y \in \mathcal{M}$ соответствующий ей набор $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. Тем самым мы получим набор функций $\{\lambda_n(y); n \in \mathbb{N}\}$, причем $\lambda_n(y) \leq \lambda_{n+1}(y)$, $n \in \mathbb{N}$. В связи с тем, что кратность каждого нуля $\lambda_n(y)$, $n \in \mathbb{N}$ функции $\Phi(\lambda|y)$ может быть только конечной, назовем функцию $\lambda_n(y)$ l-кратно вырожденной в точке y, если существует ровно $l > 1$ номеров m таких, что $\lambda_m(y) = \lambda_n(y)$. Для l-кратно вырожденной в y функции $\lambda_n(y)$ имеем

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\,\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, l-1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l}\,\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Функция $\Phi(\lambda|y)$ согласно построению, данному в разделе 4, бесконечно дифференцируема по λ и y в $\mathcal{M} \otimes (0, \infty)$. Построим множества X_l в $\mathcal{M}$

$$X_l = \Bigg\{ y:\ \text{существует}\ \lambda_n(y)\ \ \text{такая, что}$$

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\,\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l}\,\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} \neq 0 \Bigg\}\,; \qquad l = 2, 3, \ldots$$

т.е. при $y \in X_l$ существует по крайней мере одна l-кратно вырожденная функция $\lambda_n(y)$.

Из предположения, принятого нами выше, следует, что замыкание X_1 не исчерпывает $\mathcal{M}$. Тогда, ввиду конечной кратности вырождения каждой $\lambda_n(y)$, существует по крайней мере одно непустое X_l, содержащее открытое подмножество Z. В самом деле, если замыкание X_1 совпадает с $\mathcal{M}$, то при $y \in X_1$, ввиду бесконечной дифференцируемости $\Phi(\lambda|y)$, по теореме о неявной функции все $\lambda_n(y)$, невырождены, т.е. $\kappa'_n = 1$ при всех n. Это противоречит предположению.

Точно так же, применяя теорему о неявной функции $\partial^{l-1}\Phi(\lambda|y)/\partial\lambda^{l-1} = 0$ при $y \in Z$, существует однозначная дифференцируемая функция $\lambda(y)$, которая совпадает с какой-то l-кратно вырожденной при $y \in Z$ функцией $\lambda_n(y)$. Можно утверждать большее, так как $\Phi(\lambda|y)$ – бесконечно дифференцируемая функция, то таковой же является и $\lambda(y)$. Поэтому, представив $\Phi(\lambda|y) = (\lambda - \lambda(y))^l \Phi'(\lambda|y)$, где $\Phi'(\lambda(y)|y) \neq 0$, $y \in Z$, имеем

$$\partial_y^k \Phi(\lambda|y)\Big|_{\lambda=\lambda(y)} = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, l-1\,; \tag{17}$$

$$\partial_y^l \Phi(\lambda|y)\Big|_{\lambda=\lambda(y)} \neq 0\,, \qquad l \geq 1\,. \tag{18}$$

Здесь ∂_y – дифференциал по y в $\mathcal{M}$.

Таким образом, в открытом подмножестве Z уравнения (П17) при условии (П18) должны иметь совместные решения. При $k = 0, 1$ (П17) представляет собой систему из $(3d^2+1)$ уравнений относительно $(3d^2+1)$ вещественных независимых параметров и поэтому, вообще говоря, они не могут иметь решений при y, принадлежащих множеству точек общего положения. Если это справедливо, то мы и прийдем к искомому противоречию, доказывающему сформулированное утверждение. Нам потребуется следующая

Лемма *Если матрица M удовлетворяет уравнениям*

$$ME(\lambda|y) \;=\; 0\,, \tag{19}$$

$$\mathrm{Sp}(M\partial_y E(\lambda|y)) \;=\; 0\,, \tag{20}$$

то $M = 0$.

□ Из всех возможных вариаций в (П20) нам достаточно рассмотреть лишь такие, которые удовлетворяют условиям неизменяемости двух матриц: а) $A_V A_V^+ - \lambda D_V$; б) $A_V - A_V^+$. При выполнении этих условий справедливо $\partial_y R_1 = \partial_y R_2 = 0$ и, следовательно $\partial_y S = 0$. Поэтому из (П14) вытекает

$$\begin{aligned} \partial_y E_4 \;&=\; V^{1/2}\mathcal{E}(\partial_y A_V + \lambda \partial_y K_V)V^{-1/2}\,, \\ \mathcal{E} \;&=\; \exp(-R_2\tau)\cdot S - S\cdot\exp(R_1\tau)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (П20) следует

$$\mathrm{Sp}(M\mathcal{E}(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V)) \;=\; 0\,.$$

С помощью уравнения Ляпунова $A_V K_V + K_V A_V^+ = -D_V$ найдем уравнение для $\partial_y K_V$

$$A_V\cdot\partial_y K_V + \partial_y K_V\cdot A_V^+ \;=\; -\frac{1}{\lambda}\left[\partial_y A_V\cdot(A_V^+ + \lambda K_V) \;+\; (A_V + \lambda K_V)\cdot\partial_y A_V\right].$$

Используя стандартную форму решения [12] уравнения Ляпунова, получаем

$$\mathrm{Sp}(M\mathcal{E}\partial_y K_V) \;=$$

$$=\; -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \mathrm{Sp}\Big\{\Big[(A_V^+ + \lambda K_V)\mathrm{e}^{A_V^+ t}M\mathcal{E}\mathrm{e}^{A_V t} + \mathrm{e}^{A_V^+ t}M\mathcal{E}\mathrm{e}^{A_V t}(A_V + \lambda K_V)\Big]\cdot\partial_y A_V\Big\}dt\,.$$

После преобразований найдем

$$\mathrm{Sp}\left[M\mathcal{E}\left(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V\right)\right] \;=\; \mathrm{Sp}\left(\{2M\mathcal{E} - \lambda[K_V, N]_+\}\partial_y A_V\right)\,,$$

где символом $[.,.]_+$ обозначен антикоммутатор фигурирующих матриц и

$$N \;=\; \int\limits_0^\infty \exp(A_V^+ t)\cdot M\mathcal{E}\cdot\exp(A_V t)dt\,.$$

Ввиду произвольности дифференциала $\partial_y A_V$ с учетом того, что $\partial_y(A_V^+ - A_V) = 0$, получим следующую систему тождеств:

$$M\mathcal{E} \;=\; \frac{\lambda}{2}[K_V, N]_+\,; \qquad A_V^+ N + N A_V \;=\; M\mathcal{E}\,.$$

Из этих тождеств следует, что матрица N удовлетворяет условиям

$$\left(A_V^+ - \frac{\lambda}{2}K_V\right)\cdot N \;+\; N\cdot\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right) \;=\; 0\,. \tag{22}$$

Учтем теперь то обстоятельство, что вместо основной задачи нахождения производящей функции можно рассматривать изоморфную ей задачу, получающуюся с помощью неособенного преобразования W (см. Замечание 6). С помощью указанного преобразования всегда можно добиться, чтобы диссипативная матрица A_V удовлетворяла условию $\mathrm{Re}(A_V f, f) < 0$ для произвольного ненулевого вектора f. Тогда матрицы $\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ и $\left(-A_V^+ + \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ не имеют общих собственных чисел, так как собственные числа матрицы $\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ имеют отрицательную действительную часть. Поэтому из (П22) следует, что

$$N \;=\; \int\limits_0^\infty \exp(A_V^+ t)\cdot M\mathcal{E}\cdot\exp(A_V t)dt \;=\; 0\,.$$

В результате интегрирования получим

$$M\mathcal{E} \;=\; 0\,. \tag{23}$$

Из этого равенства и условия (П19) следует

$$M\left(SR_1\cdot\exp(R_1 t) \;+\; \exp(-R_2 t)\cdot R_2 S\right) \;=\; 0\,,$$

а повторное использование (П23) и уравнения (П13) приводит к $M\exp(R_1 t) = 0$. Поэтому $M = 0$. ■

Воспользовавшись Леммой покажем теперь, что равенства (П17) и (П18) не могут одновременно выполняться на подмножестве Z. Поскольку

$$\mathrm{rank}E(\lambda_n|y) \;=\; d - l + 1\,,$$

то

$$\det E(i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_k) \;=\; 0\,;\qquad k = 0,1,\ldots,l-2\,, \tag{24}$$

где $E(i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_k)$ – матрица, получающаяся из $E(\lambda_n|y)$ вычеркиванием строк с номерами $i_1,\ldots,i_k$ и столбцов с номерами $j_1,\ldots,j_k$. Вместе с тем существуют такие наборы номеров $i_1,\ldots,i_{l-1}$ и $j_1,\ldots,j_{l-1}$, для которых

$$L(i_1,\ldots,i_{l-1};\, j_1,\ldots,j_{l-1}) \;\equiv\; (-1)^\Sigma\det E(i_1,\ldots,i_{l-1};\, j_1,\ldots,j_{l-1}) \;\neq\; 0\,,$$

где $\Sigma = i_1 + \ldots + i_{l-1} + j_1 + \ldots + j_{l-1}$. Из определения $\Phi(\lambda_n|y)$ и равенства

$$L(i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_k) \;=\; 0\,,\qquad k = 1,\ldots,l-2\,,$$

получим

$$\partial_y^{l-1}\Phi(\lambda_n|y) \;=\; \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{l-1}\\ j_1,\ldots,j_{l-1}}} L(i_1,\ldots,i_{l-1};\, j_1,\ldots,j_{l-1})\,\times \tag{25}$$

$$\times\,(\partial_y E)_{i_1 j_1}\cdot(\partial_y E)_{i_2 j_2}\cdot\ldots\cdot(\partial_y E)_{i_{l-1} j_{l-1}} \;=\; 0\,.$$

Суммирование в этом выражении проводится независимо по всем указанным индексам, полагая при этом $L = 0$, если в наборах $(i_1, \dots, i_{l-1})$ и $(j_1, \dots, j_{l-1})$ встретятся повторяющиеся индексы.

Введем теперь последовательность матриц

$$L^{(1)}_{j_1\, i_1} \;=\; \sum_{\substack{i_2,\dots,i_{l-1}\\ j_2,\dots,j_{l-1}}} L(i_{l-1}, \dots, i_2, i_1;\, j_{l-1}, \dots, j_2, j_1) \cdot (\partial_y E)_{i_{l-1}\, j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot (\partial_y E)_{i_2\, j_2}\,. \tag{26}$$

Аналогичным образом, введём матрицы для каждого значения $k = 2, 3, \dots, l-1$ и для любых возможных наборов $(i_1, \dots, i_k)$ и $(j_1, \dots, j_k)$

$$L^{(k)}_{j_k\, i_k}(i_1, \dots, i_{k-1};\, j_1, \dots, j_{k-1}) \;\equiv \tag{27}$$

$$\equiv \sum_{\substack{i_{k+1},\dots,i_{l-1}\\ j_{k+1},\dots,j_{l-1}}} L(i_{l-1}, \dots, i_1;\, j_{l-1}, \dots, j_1) \cdot (\partial_y E)_{i_{l-1}\, j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot (\partial_y E)_{i_{k+1}\, j_{k+1}}\,.$$

Из разложения минора $(k+1)$-го порядка матрицы E_4 по минорам k-го порядка следует тождество

$$\sum_{i_s} L(i_1, \dots, i_{k+1};\, j_1, \dots, j_{k+1}) E_{i_s\, j_s} \;=\; 0\,, \qquad k = 0, 1, \dots, l-2\,,$$

поскольку минор более высокого порядка равен нулю, $\mathrm{rank} E_4 = d - l + 1$. В терминах матриц (П26), (П27) последнее тождество принимает вид

$$\begin{aligned}
&L^{(1)} E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,,\\
&L^{(2)}(i_1;\, j_1) E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&L^{(l-1)}(i_1, \dots, i_{l-2};\, j_1, \dots, j_{l-2}) E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Учтём, что из (П25) следует

$$\mathrm{Sp}\left(L^{(1)} \partial_y E\right) \;=\; 0\,. \tag{29}$$

Теперь применим к системам (П28) и (П29) доказанную в этом приложении Лемму. На основании её утверждения следует, что $L^{(1)} = 0$. Это равенство можно переписать в виде $\mathrm{Sp}(L^{(2)}(i_1, j_1)\partial_y E(\lambda_n|y)) = 0$. Далее, повторно применяя указанную Лемму, получаем $L^{(2)}(i_1, j_1) = 0$. Продолжив этот рекуррентный процесс спуска, прийдем к равенству

$$L_{i_{l-1}, j_{l-1}}(i_1, \dots, i_{l-2};\, j_1, \dots, j_{l-2}) \;=\; L(i_1, \dots, i_{l-1};\, j_1, \dots, j_{l-1}) \;=\; 0\,. \tag{30}$$

Это равенство означает, что $\mathrm{rank} E(\lambda_n|y) \le d - l$. Таким образом, мы пришли к требуемому противоречию, которое указывает, что условия (П17) и (П18) несовместны на открытом подмножестве Z. Это доказывает совпадение величин κ_n и κ'_n. ■

Литература

1. Christopeit R., Helmes K. Limited risk control of the Ornstein-Uhlenbeck process // Math. Operationsforsch. und Statist. – Ser. Optimiz. – 1980. – 11,4. – P.605-616.
2. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. / Б. Саймон. – М.: Наука, 1978. – 358 с.
3. Пугачёв В.Н., Синицын И.Н. Стохастические динамические системы. / В.Н.Пугачёв. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Lavenda B.H., Compiani M. The Physical Implications of Two Forms of Stochastic Calculi // Lettere al Nuovo Cimento. – 1983. – 38,9. – P.345-352.
5. Smyth J., Moss P., McClintak P.V.E., Clarckson D. Ito versus Stratonovich revisited. // Physical Letters. – 1983. – 97,3. – P.95-98.
6. Дуб Дж. Вероятностные процессы. / Дж.Дуб. – М.: Издательство иностранной литературы, 1965. – 605 с.
7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. / И.М.Глазман. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
8. Лоэв М. Теория вероятностей. / М.Лоэв. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 719 с.
9. Slepian D. Fluctuation of random noise power // Bell Systems Technical Journal. – 1958. – p.95-98.
10. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. / М.Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 299 с.
11. Гантмахер М. Теория матриц. / М.Гантмахер. – М.: Наука, 1974. – 280 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р.Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

THE EXPONENTIAL EXPANSION OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF QUADRATIC FUNCTIONAL VALUES ON ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS TRAJECTORIES

Yu.P. Virchenko,[1] **A.S. Mazmanishvili**[2]

[1] Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

[2] Sumy State University,

Rimsky-Korsakov Str., 2, Sumy, 40007, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

The problem of the probability distribution density $p(\varepsilon)$ evaluation connected with random values of the quadratic functional on multidimensional Ornstein-Uhlenbeck process trajectories in $\mathbb{C}^d$ is studied. The representation of the distribution density in the form of the expansion on exponential functions $\exp(-\lambda_n\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$ is obtained, where $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ is the eigenvalue spectrum of the correlation operator connected with the process. It is generated by the density $p(\varepsilon)$ reprtesentation in the form of the infinite convolution sequence of exponential distributions.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process, correlation operator, quadratic functional, the Hadamard expansion, exponential expansion.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ОБ ОДНОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Св.А. Гриценко, Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 15, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru,reshat85@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается система уравнений Стокса, описывающая движение слабосжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве, в которой кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси. Рассматриваемая система дополняется уравнением диффузии для примеси как в жидкости, так и в твердом скелете, содержащем поровое пространство. Последнее предположение о диффузии в твердом скелете является искусственным и носит вспомогательный характер. Для полученной вспомогательной задачи доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи в ограниченной области с однородным условием Дирихле для скорости жидкости и однородным условием Неймана для концентрации примеси.

Ключевые слова: Уравнения Стокса, вязкая жидкость, нелинейная диффузия.

1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ $(\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup S)$ ограниченная область с липшицевой границей S, $\mathbf{v}(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ - скорость жидкости, $p(x,t)$ - давление, $c(x,t)$ - концентрация примеси, x - безразмерная координата: $x = \acute{x}/L$, где L - характерный размер, t - безразмерное время: $t = \acute{t}/\tau$, где τ - характерное время.

В области Ω_f с липшицевой границей Γ рассматривается следующая система уравнений:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(\alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} + \big(\alpha_\nu (\operatorname{div}\mathbf{v}) - p\big)\mathbb{I}\Big) + \rho \mathbf{f}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad \mathbf{v}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_f, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \triangle c,$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c(x,0) = c_0(x), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, $\mu(c)$ – безразмерная вязкость, $\mathbb{I}$ - единичная матрица, D — коэффициент диффузии.

Эта задача является основной при изучении диффузии в пористой среде, при этом область Ω_f моделирует поровое пространство в твердом скелете Ω_s. Очевидно, что даже при наличии достаточно гладкого и единственного решения этой задачи, его практическая значимость ничтожно мала, поскольку ни его численная реализация, ни изучение его качественных свойств невозможны в силу быстро осциллирующих коэффициентов уравнений движения и диффузии. Поэтому естественным является усреднение задачи – вывод приближенных уравнений, не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов. На этом пути возникают трудности, связанные с усреднением нелинейных членов, что диктует рассмотрение вспомогательной задачи с "малой"диффузией в твердом скелете:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = \operatorname{div}\big((\alpha_D\,\chi + \lambda(1-\chi))\nabla c\big), \tag{1.5}$$

здесь $\lambda > 0$, $\chi(x)$ — характеристическая функция области Ω_f.

Задача (1.1) – (1.3), (1.5), дополненная краевым условием

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S = \partial\Omega, \quad c(x,0) = c_0(x), \quad \text{при } \; x \in \Omega \tag{1.6}$$

является основным объектом исследования настоящей работы.

Усреднение и предельный переход при $\lambda \to 0$ будет предметом дальнейших публикаций.

Определение 1.1 *Функции $\mathbf{v}(x,t)$, $p(x,t)$ и $c(x,t)$ называются обобщенным решением задачи (1.1) – (1.3), (1.5)—(1.6) в области $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, если*

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $\quad c \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_T) \bigcap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (1.2)

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_T} (\alpha_\tau \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_\mu\,\mu(c)\nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi - \alpha_\nu\, div\mathbf{v}\, div\varphi + p\, div\varphi)\;\; dxdt = -\int_{\Omega_T} \rho\mathbf{f}\cdot\varphi\; dxdt \tag{1.7}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(x,t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$,

$$\int_{\Omega_T} \left(c\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{v}\cdot\nabla c\;\psi - (\alpha_D\,\chi + \lambda(1-\chi))\;\nabla c\cdot\nabla\psi\right) dxdt = -\int_{\Omega} c_0(x)\psi(x,0)dx \tag{1.8}$$

для произвольной гладкой функции $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_T)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$.

Здесь используется обозначение: $A : B \equiv tr(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы.

Пусть

$$\mu(c) \in \mathbb{C}^2(0,\infty),\; |\mu|^{(1)}_{\Omega_T} < \nu_0^{-1}, \quad 0 < \nu_0 < \mu(c) < \nu_0^{-1}, \quad 0 \le c_0(x) \le 1,\;\; c_0(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega),$$

$$\int_{\Omega_T} |\rho\mathbf{f}|^2 dxdt = F^2 < \infty,$$

α_μ, α_ν, α_p - положительные ограниченные постоянные;

$$0 < \alpha_\mu < \nu_0^{-1},\;\; 0 < \alpha_\nu < \nu_0^{-1},\;\; 0 < \alpha_p < \nu_0^{-1}.$$

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1.2 *Задача (1.1)–(1.3), (1.5)—(1.6) имеет обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}(\alpha_\tau|\mathbf{v}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|p|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|div\,\mathbf{v}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{v}|^2dxdt\leqslant M_0(\nu_0,T)F^2,\quad(1.9)$$

$$0\leqslant c(x,t)\leqslant 1.\quad(1.10)$$

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}|c|^2dx+\int_{\Omega_T}\big(\alpha_D\chi+\lambda(1-\chi)\big)|\nabla c|^2dx\leq M(\nu_0,T)F^2.\quad(1.11)$$

2 Вспомогательные задачи

Зададим множество $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}=\{\bar{c}(x,t)\in\mathbb{C}(\Omega_T)\ \mid\ 0\leq\bar{c}(x,t)\leq 1\}.$$

Пусть $\bar{c}(x,t)\in\mathfrak{M}$. Определим $\mathbf{u}(x,t)$ как решение задачи (1.1)–(1.3) с функцией $\mu(\bar{c})$:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\alpha_\mu\mu(\bar{c})\nabla\mathbf{u}+\alpha_\nu(\operatorname{div}\mathbf{u})-q\right)\mathbb{I}+\rho\mathbf{f},\quad(2.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\alpha_p\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad(2.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0\quad\text{при }\mathbf{x}\in\Gamma,\quad\mathbf{u}(x,0)=0.\quad(2.3)$$

Определение 2.1 *Функции $\mathbf{u}(x,t)$, $q(x,t)$ называются обобщенным решением задачи (3.1) – (3.3) в области Ω_T, если*
1) $\partial q/\partial t\in\mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\quad\mathbf{u}\in\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;
2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);
3) функции $\mathbf{u}(x,t)$, $q(x,t)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T}(\alpha_\tau\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_\mu\,\mu(\bar{c})\nabla\mathbf{u}:\nabla\varphi+q\,div\varphi-\alpha_\nu\,div\mathbf{u}div\varphi)\ \ dxdt=-\int_{\Omega_T}\rho\mathbf{f}\cdot\varphi\ \ dxdt\quad(2.4)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(x,t)$, равной нулю на границе Γ и при $t=T$.

Лемма 2.2 *Для каждого фиксированного $\bar{c}(x,t)\in\mathfrak{M}$ задача (3.1) – (3.3) имеет единственное решение и для него справедлива оценка:*

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|div\mathbf{u}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt\leqslant M_0(\nu_0,T)F^2.\quad(2.5)$$

Доказательство.

В тождестве (3.4) выражая div**u** в третьем слагаемом из уравнения неразрывности (3.2) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\alpha_\tau \mathbf{u}^2+\frac{1}{\alpha_p}q^2)dx+\int_\Omega\big(\alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u})^2+\alpha_\mu\mu(\bar c)(\nabla\mathbf{u})^2\big)dx=-\int_\Omega\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dx.$$

Проинтегрируем последнее равенство от 0 до T , учтем предположение $0<\nu_0<\mu(c)<\nu_0^{-1}$, а правую часть оценим с помощью неравенств Гельдера и Коши с ε:

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_T}(\rho\mathbf{f})^2dxdt+\frac{\varepsilon T}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2dx$$

для $\forall\varepsilon>0$.

Положив $\varepsilon=\alpha_\tau/2T$, получим требуемую оценку

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt\leqslant M_0(\nu_0,T)F^2.$$

Эта оценка позволяет доказать существование и единственность обобщенного решения методом Фаэдо - Галеркина, подробное изложение которого можно найти, например в [2, с. 88]. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{N}$ - нормированное пространство с нормой:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2=\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt. \tag{2.6}$$

В силу леммы 3.1 определен оператор $\mathbf{A}:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u}=\mathbf{A}(\bar c)$.

Лемма 2.3 *Оператор* **A** *- непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_1=\mathbf{A}(\bar c_1),\mathbf{u}_2=\mathbf{A}(\bar c_2),\mathbf{u}=\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_2,\bar c=\bar c_1-\bar c_2,q=q_1-q_2$. Тогда для разности **u** имеем:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\mathrm{div}\,(\alpha_\mu(\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}_1-\mu(\bar c_2)\nabla\mathbf{u}_2)+\alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u})-q)\mathbb{I}$$

$$\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}_1-\mu(\bar c_2)\nabla\mathbf{u}_2=\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}_1-\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}_2+\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}_2-\mu(\bar c_2)\nabla\mathbf{u}_2=$$

$$=\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}+(\mu(\bar c_1)-\mu(\bar c_2))\nabla\mathbf{u}_2.$$

Таким образом **u** есть решение следующей задачи:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\mathrm{div}\,(\alpha_\mu\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}+\alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u})-q)\mathbb{I}+\alpha_\mu\mathrm{div}\,([\mu(\bar c_1)-\mu(\bar c_2)]\nabla\mathbf{u}_2), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\alpha_p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0$$

$$\mathbf{u}(x,t)=0, \quad \text{при } \mathbf{x}\in\Gamma.$$

Умножим уравнение (3.7) на функцию $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_\Omega \alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dx=\int_\Omega \operatorname{div}\left(\alpha_\mu\mu(\bar c_1)\nabla\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{u}dx+\alpha_\nu\int_\Omega \operatorname{div}\left((\operatorname{div}\mathbf{u})-q)\right)\mathbb{I}\cdot\mathbf{u}dx+$$
$$+\alpha_\mu\int_\Omega \operatorname{div}\left([\mu(\bar c_1)-\mu(\bar c_2)]\nabla\mathbf{u}_2\right)\cdot\mathbf{u}dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и выражая $\operatorname{div}\mathbf{u}$ из уравнения неразрывности, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}q^2)dx+\int_\Omega\big(\alpha_\nu(\operatorname{div}\mathbf{u})^2+\alpha_\mu\mu(\bar c_1)(\nabla\mathbf{u})^2\big)dx=$$
$$=-\int_\Omega\alpha_\mu(\mu(\bar c_2)-\mu(\bar c_1))(\nabla\mathbf{u}_2:\nabla\mathbf{u})dx.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до T, получим:

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+2\alpha_\nu\int_{\Omega_T}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2dxdt+2\alpha_\mu\int_{\Omega_T}\mu(\bar c_1)|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt=$$
$$=-2\alpha_\mu\int_{\Omega_T}(\mu(\bar c_2)-\mu(\bar c_1))(\nabla\mathbf{u}_2:\nabla\mathbf{u})dxdt. \tag{2.8}$$

Оценим теперь правую часть (3.8), пользуясь ограниченностью производной $\mu'(\bar c)$, неравенством Гёльдера и неравенством Коши с ε:

$$|2\alpha_\mu\int_{\Omega_T}(\mu(\bar c_2)-\mu(\bar c_1))(\nabla\mathbf{u}_2:\nabla\mathbf{u})dxdt|\leqslant\frac{2\alpha_\mu}{\nu_0}\int_{\Omega_T}|\bar c\nabla\mathbf{u}_2:\nabla\mathbf{u}|dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\alpha_\mu}{\nu_0}\sqrt{\int_{\Omega_T}|\bar c\nabla\mathbf{u}_2|^2dxdt}\sqrt{\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\alpha_\mu}{\nu_0}\big(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_T}|\bar c\nabla\mathbf{u}_2|^2dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt\big).$$

Левую часть (3.8) оценим снизу выражением:

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt,$$

положим $\varepsilon=\nu_0^2/2$ и воспользуемся оценкой (3.5) для $|\nabla\mathbf{u}_2|$. Получим:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2\leqslant M_1(\nu_0,T)F^2\int_{\Omega_T}|\bar c|^2dxdt\leqslant M_1(\nu_0,T)F^2(\|\bar c\|_{2,\Omega_T})^2\leqslant$$
$$\leqslant M_1(\nu_0,T)F^2|\Omega_T|(\max_{\Omega_T}|\bar c|)^2=M_2(\nu_0,T,\Omega_T)F^2(|\bar c^{(0)}_{\Omega_T}|)^2.$$

Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}}\leqslant M_2(\nu_0,T,\Omega_T)|\bar c|^{(0)}_{\Omega_T}$, что и влечет непрерывность оператора $\mathbf{A}$. Лемма доказана.

Полученную функцию $\mathbf{u}$ и выражение $D(x) = \alpha_D\,\chi(x) + \lambda\big(1-\chi(x)\big)$ сгладим с использованием следующих операторов усреднения по переменным x и t:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4}\int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right)\mathbf{u}(y,\tau)\,dy,$$

$$D_h(x) = \mathbf{M}_1^{(h)}(D(x)) = \frac{1}{h^3}\int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) D(y)\,dy,$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1}\eta(|s|)\,ds = 1$. Функции $\mathbf{w}_h$ и D_h являются гладкими, финитными и при $h \to 0$ сходятся к $\mathbf{u}$ и $D(x)$ по норме $L_2(\Omega'_{T-\delta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\delta} \subset \Omega_T$, $h \leqslant \delta$.

Определим теперь функцию $c_h(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h}\cdot\nabla c_h = \operatorname{div}(D_h \nabla c_h) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c_h(x,0) = \mathbf{M}_1^{(h)}(c_0(x)), \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{2.10}$$

Задача (3.9)-(3.10) как задача с гладкими коэффициентами имеет бесконечно дифференцируемое единственное решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \le c_h(x,t) \le \max c_0(x) \le 1. \tag{2.11}$$

Таким образом для каждой фиксированной функции $\mathbf{u}(x,t) \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $c_h(x,t) \in \mathfrak{M}$,то есть определен оператор $\mathbf{B}:\ \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, такой что $c_h = \mathbf{B}(\mathbf{u})$.

Умножая уравнение диффузии на c_h и интегрируя его по частям, получаем стандартным образом энергетическую оценку

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega |c_h|^2 dx + \int_{\Omega_T}\big(\alpha_D\chi + \lambda(1-\chi)\big)|\nabla c_h|^2 dx \le M(\nu_0,T)F^2. \tag{2.12}$$

Лемма 2.4 *Оператор* $\mathbf{B}$ *- непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_1 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $c_1 = \mathbf{B}(\mathbf{w}_1)$, $c_2 = \mathbf{B}(\mathbf{w}_2)$, $c = c_1 - c_2$ (индекс h для краткости опустим).

Тогда разность $c(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w_1}\cdot\nabla c = \operatorname{div}(D_h\nabla c) - \mathbf{w}\cdot\nabla c_2 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in S, \quad c(x,0) = 0.$$

Умножим (3.13) на $c(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega D_h|\nabla c|^2 dx = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{w}_1\frac{c^2}{2}dx - \int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2 dx.$$

По построению, $\mathrm{div}\mathbf{w} \leqslant N_1(h)$, $\nabla c_2 \leqslant N_1(h)$, $D_h \leqslant N_1(h)$. Оценим последнее слагаемое в правой части:

$$|\int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2 dx| \leqslant \sqrt{\int_\Omega |c\nabla c_2|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx} \leqslant |N_1(h)|\sqrt{\int_\Omega |c|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}N_2(h)\big(\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\big).$$

В итоге получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |c|^2 dx + N_1(h)\int_\Omega |\nabla c|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}N_2(h)\big(\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\big).$$

Обозначив через $y = \int_\Omega c^2 dx$ можно записать неравенство в виде:

$$\frac{dy}{dt} \leqslant N_3(h)\big(y + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\big).$$

Воспользовавшись неравенством [1, с. 112, лемма 5.5], имеем:

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega c^2 dx \leqslant N(h)\int_{\Omega_T} |\mathbf{w}|^2 dx$$

или

$$\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant \|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T}. \tag{2.14}$$

Чтобы получить оценку (3.14) для $|c|^0_{\Omega_t}$, обратимся к лемме 3.3 из [1. с 95]. Нас интересует утверждение леммы о том, что если $u(x,t) \in \mathbb{W}^{2l,l}_q(\Omega_T)$ и $2l-2r-s-(n+2)/q > 0$, то при $0 \leq \lambda < 2l-2r-s-(n+2)/q$

$$\langle D^r_t D^s_x u\rangle^{(\lambda)}_{\Omega_T} = b_1\delta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda}\langle\langle u\rangle\rangle^{2l}_{\Omega_T} + b_2\delta^{-(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda)}\|u\|_{q,\Omega_T}.$$

В нашем случае $c(x,t) \in \mathbb{W}^{4,2}_2(\Omega_T)$, то есть $l=2, \quad r=0, \quad s=0, \quad n=3, \quad \lambda=0,$

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} = b_1\delta^{\frac{3}{2}}\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T} + b_2\delta^{-\frac{5}{2}}\|c\|_{2,\Omega_T} \equiv A\delta^{\frac{3}{2}} + B\delta^{-\frac{5}{2}} \equiv f(\delta).$$

Функция $f(\delta)$ достигает минимума при $\delta = (\frac{5B}{3A})^{1/4}$, в этом случае $f(\delta) = b_3A^{5/8}B^{3/8}$ и

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_4\big(\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T}\big)^{5/8}\big(\|c\|_{2,\Omega_T}\big)^{3/8}.$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_5\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_6\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T} \leqslant b\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}.$$

Таким образом, $|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbf{B}$. Лемма доказана.

Определим теперь оператор

$$\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},$$

$$c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(\bar{c})).$$

Лемма 2.5 *Оператор* $\mathbf{\Phi}$ *имеет неподвижную точку.*

Доказательство.

Оператор $\mathbf{\Phi}$ непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Более того, можно доказать, что он вполне непрерывен. Для доказательства воспользуемся теоремой Арцела о том, что множество M компактно тогда и только тогда, когда входящие в него функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \quad \rho(x', x'') < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \ \ \forall f \in M, \quad \forall x', x'' \in M.$$

В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(x,t)$ по построению обладают ограниченными производными по x и по t, следовательно

$$|c_h(x', t) - c_h(x'', t)| \leqslant \frac{\partial c_h(x^*, t)}{\partial x_j} |x'_j - x''_j| \leqslant k_1 |x'_j - x''_j|, \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$|c_h(x, t') - c_h(x, t'')| \leqslant \frac{\partial c_h(x, t^*)}{\partial t} |t' - t''| \leqslant k_2 |t' - t''|,$$

то есть функции $c_h(x,t)$ равностепенно непрерывны по x и по t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор $\mathbf{\Phi}$ любое ограниченное множество переводит в компактное, т.е является вполне непрерывным.

Множество $\mathfrak{M}$ является выпуклым. Действительно, пусть $c^1, c^2 \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим отрезок, соединяющий c^1 и c^2:

$$c_\alpha(x,t) = \alpha c^1(x,t) + (1-\alpha) c^2(x,t), \quad \alpha \in [0,1].$$

Так как $0 \leq c_\alpha \leq \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$, то весь отрезок лежит в $\mathfrak{M}$.

Все это позволяет применить к оператору $\mathbf{\Phi}$ принцип неподвижной точки (Теорема Шаудера) [4, с. 411].

Лемма доказана.

Итак, существует неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, обозначим ее как $\widetilde{c}_h$,

$$\widetilde{c}_h = \mathbf{\Phi}(\widetilde{c}_h),$$

и пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{A}(\widetilde{c}_h)$. Тогда $\widetilde{c}_h$ является решением задачи:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}_h}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\alpha_\mu \mu(\widetilde{c}_h) \nabla \widetilde{\mathbf{u}}_h + \alpha_\nu (\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}_h) \mathbb{I} - \widetilde{q}_h \mathbb{I} \right) + \rho \mathbf{f}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \widetilde{q}_h}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}_h = 0, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \widetilde{\mathbf{u}}_h(x, 0) = 0 \ \text{ при } \ \mathbf{x} \in \Omega_f \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_h}{\partial t} + \mathbf{M}^h(\widetilde{\mathbf{u}}_h) \cdot \nabla \widetilde{c}_h = \operatorname{div}(D_h \nabla \widetilde{c}_h) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in S, \quad \widetilde{c}_h(x,0) = \mathbf{M}_1^{(h)}(c_0(x)) \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2.19}$$

где (3.18) понимается как интегральное тождество:

$$\int_{\Omega_T} (\widetilde{c}_h \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{M}^{(h)}(\widetilde{\mathbf{u}}_h) \cdot \nabla \widetilde{c}_h \psi - D_h \nabla \widetilde{c}_h \cdot \nabla \psi) dx dt =$$

$$= -\int_{\Omega} \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x)) \psi(x,0) dx \tag{2.20}$$

$$\forall \psi(x,t) \in \mathbb{C}^{\infty}(\Omega_T): \quad \psi(x,T) = 0$$

.

3 Предельный переход

Лемма 3.1 *Решение* ($\mathbf{v}$, p, c) *исходной задачи (1.1)–(1.3), (1.5)—(1.6) есть предел при* $h \to 0$ *решений* $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{q}_h, \widetilde{c}_h)$ *задачи (3.15) – (3.19).*

Доказательство.

Индекс $\sim$ опускаем.

Умножим (3.15) на произвольную гладкую вектор-функцию $\varphi(\mathbf{x}, t)$, равную нулю на границе Γ и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T.

$$\int_{\Omega_T} (\alpha_\tau \mathbf{u_h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c_h) \nabla \mathbf{u_h} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \mathrm{div} \mathbf{u_h} \, \mathrm{div} \varphi + q_h \, \mathrm{div} \varphi + \rho \mathbf{f} \cdot \varphi) \, dx \, dt = 0$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (3.5) и (3.11) справедливы для всех h с постоянными, не зависящими от h. Оценка (3.5) позволяет из последовательности $\{\mathbf{u}_h\}$ выбрать подпоследовательность такую, что

$$\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ слабо в } \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T).$$

Согласно [2, с.18], имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \{v | v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T); \partial v/\partial t \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\}$. Очевидно, что $\mathbf{u}_h \in W$. По теореме о компактности [2, с.70, теорема 5.1] вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что

$$\mathbf{u}_h \to \mathbf{v} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Аналогично, в силу оценки (3.11), из последовательности $\{c_h\}$ можно выбрать подпоследовательность такую, что

$$c_h \rightharpoonup c \text{ слабо в } \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T).$$

Согласно той же теореме о компактности,

$$c_h \to c \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Переходя к пределу в энергетическом неравенстве (3.12), получим требуемую в условии теоремы оценку (2.5).

Так как $\mu(c_h)$ непрерывна, то

$$\mu(c_h) \to \mu(c) \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Отсюда мы имеем слабую сходимость

$$\alpha_\mu \mu(c_h)\nabla \mathbf{u} : \nabla\varphi \rightharpoonup \alpha_\mu \mu(c)\nabla \mathbf{u} : \nabla\varphi.$$

Из оценки (3.5) заключаем также, что

$$q_h \rightharpoonup p \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\frac{\partial q_h}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t} \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

и выполняем предельный переход в остальных слагаемых тождества (3.15), а также в уравнении (3.16).

Рассмотрим теперь предельный переход в уравнении диффузии (3.18), которое представим в виде интегрального тождества. Умножим (3.18) на произвольную гладкую функцию $\xi(x,t)$, равную нулю при $t = T$ и проинтегрируем по Ω_T:

$$\int_{\Omega_T} (-c_h \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\,\nabla c_h \xi + D_h\,\nabla c_h \cdot \nabla\xi)\,dx\,dt = \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x))\xi(x,0)\,dx \tag{4.1}$$

Получим оценку для ∇c_h. Умножим (3.18) на c_h и проинтегрируем по Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c_h^2\,dx + \int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx = \int_\Omega D_h|\nabla c_h|^2\,dx. \tag{4.2}$$

Учитывая (3.11), оценим второе слагаемое:

$$\int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx \leqslant \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\nabla c_h|^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega}\cdot\|\nabla c_h\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega})^2.$$

Учтем, что $D_h \leqslant R$ по построению. Положим $\varepsilon = R$ и проинтегрируем (4.2) по времени, получим

$$R(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{R}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{1}{2R}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2,$$

откуда

$$(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant N_1(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2.$$

и, следовательно,

$$\nabla c_h \rightharpoonup \nabla c \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Таким образом, в уравнении диффузии есть сложность в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T} \xi \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt \equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем:

$$\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) \to \mathbf{u} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T} \leqslant N \|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}.$$

Поэтому

$$I_h = \int_{\Omega_T} \xi (\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} \xi (\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla c_h \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c_h \, dx \, dt \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

$$|I_1| \leqslant \max_{(x,\,t)} |\xi| \, \|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T} \, \|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{2,\Omega_T} \leqslant N \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \quad h \to 0,$$

$$|I_2| \leqslant N_1 \|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \quad h \to 0,$$

окончательно получаем:

$$I_h \to \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c \, dx \, dt, \quad h \to 0.$$

В остальных слагаемых интегрального тождества (4.1) предельный переход стандартный.

Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.:Наука, 1967.

2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.

3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.:Наука, 1973.

4. Треногин В.А. Функциональный анализ, М.:Наука, 1980.

ON AN AUXILIARY PROBLEM OF NONLINEAR DIFFUSION IN SLIGHTLY COMPRESSIBLE VISCOUS FLUID

Sv.A. Gritsenko, R.N. Zimin

Belgorod State University,
Pobedy str., 15, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.r,reshat85@mail.ru

Abstract. We consider Stokes system, corresponding to the motion of slightly compressible viscous fluid, where kinematic viscous depends on the concentration of admixture. The Stokes system supplied with the convective diffusion equation for the admixture both in the fluid and in the solid parts. The assumption about the diffusion in solid skeleton is artificial and auxiliary one. We prove the existence of generalized solution of the initial-boundary problem for this system in the limited domain with the homogeneous Dirichlet conditions for the fluid velocity and the homogeneous Neumann condition for the concentration of admixture on the boundary of domain.

Keywords: Stokes equations, viscous fluid, nonlinear diffusion.

УДК 517.983

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе получены асимптотические формулы для числа решений задач Гольдбаха, Хуа Ло-Кена, Лагранжа с числами специального вида.

Ключевые слова: аддитивные задачи, числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1 Введение

В теории чисел важную роль играют задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы определенного вида слагаемых (аддитивные задачи). Самыми известными аддитивными задачами являются великая теорема Ферма, проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема делителей Ингама. Некоторые из перечисленных задач в настоящее время полностью решены, другие решены не полностью или вообще не решены. В современной теории чисел существует ряд направлений, в которых развивается теория аддитивных задач. Одним из них является рассмотрение аддитивных задач с дополнительными условиями на переменные, что позволяет получать новую информацию о структуре решений аддитивных задач. Наши исследования относятся к указанному направлению.

2 Аддитивные задачи с числами специального вида

1. В аддитивной теории чисел рассматривается задача о представлении натурального числа N в виде суммы n—ных степеней простых чисел $p_1,\ p_2,\dots,p_k$ ($k\geq 2$ и $n\geq 1$)

$$p_1^n+p_2^n+\dots+p_k^n=N.$$

Обозначим как $I_{k,n}(N)$ число таких представлений.

При $k=3$, $n=1$ задачу о представлении нечетного числа в виде суммы трех простых чисел называют тернарной проблемой Гольдбаха. Для числа решений задачи Гольдбаха И.М. Виноградов в 1937 г. получил асимптотическую формулу (см. [1])

$$I_{3,1}(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\backslash N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

При $k = 5$, $n = 2$ Хуа Ло—кен доказал, что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел (см. [2]). С помощью метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова, можно получить приближенное равенство

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}$$

для числа решений задачи Хуа Ло–Кена (см. [3]).

2. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое подмножество множества простых чисел. Интересно рассмотреть задачу о числе решений $J_{k,n}(N)$ уравнения

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N$$

в простых числах $p_1,\ p_2, \ldots, p_k$ из множества $\mathcal{P}$. Естественно предположить, что

$$J_{k,n}(N) \sim \mu^k(\mathcal{P}) I_{k,n}(N), \tag{1}$$

где

$$\mu(\mathcal{P}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi(N)} \sum_{\substack{p\le N\\ p\in\mathcal{P}}} 1$$

— «плотность» $\mathcal{P}$, $0 < \mu(\mathcal{P}) < 1$.

К примеру, С.А. Гриценко в 1988 г. рассмотрел множество

$$\mathcal{P} = \{p\ |\{1/2p^{1/c}\} < 1/2, 1 < c \le 2\},$$

получил, что приближенное равенство

$$J_{k,n}(N) \sim (1/2)^k I_{k,n}(N)$$

выполняется для $n = 1$, $k = 3$, а также для $n \ge 2$, $k \ge k_0(n)$ (см. [4]).

Мы рассмотрели задачу Гольдбаха и задачу Хуа Ло–Кена с простыми числами из специальных множеств. Для них приближенное равенство (1) не выполняется.

3. Далее в работе η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные числа из интервала $(0,1)$. Рассмотрим вариант тернарной проблемы Гольдбаха

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

с простыми числами из специального множества

$$\mathcal{P} = \{p \mid a < \{\eta p\} < b\}.$$

Теорема 1 *Для любого положительного C справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma(N,a,b) + O(N^2 \ln^{-C} N),$$

где

$$\sigma(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

Заметим, что сумма ряда $\sigma(N,a,b) \ge 0$. При выполнении некоторых условий на длину промежутка $b-a$ можно гарантировать, что $\sigma(N,a,b) > 0$.

Схема доказательства теоремы 1. Число решений задачи Гольдбаха представим интегралом

$$J_{3,1}(N) = \int_0^1 S_0^3(x) e^{-2\pi i x N} dx,$$

где

$$S_0(x) = \sum_{p \le N} \psi(\eta p) e^{2\pi i x p},$$

$\psi(x)$ — характеристическая функция интервала (a,b), продолженная с периодом 1 на всю числовую ось.

Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi(x)$ в ряд Фурье, перейдем к рассмотрению сумм

$$\sum_{m_1,m_2,m_3} c(m_1)c(m_2)c(m_3) \int_0^1 S(x+m_1\eta)S(x+m_2\eta)S(x+m_3\eta) e^{-2\pi i x N} dx,$$

где

$$S(x) = \sum_{p \le N} e^{2\pi i x p}.$$

Если $m_1 = m_2 = m_3 = m$, то

$$\int_0^1 S^3(x+m\eta) e^{-2\pi i x N} dx = e^{2\pi i m \eta N} I_{3,1}(N).$$

Если не все m_1, m_2, m_3 равны друг другу, то допустим, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = x + m_1\eta$.

Отрезок интегрирования разбиваем на две части: множество точек, находящихся близко к рациональным числам с малыми знаменателями («большие» дуги E_1), множество остальных точек («малые» дуги E_2). На «малых» дугах известна хорошая оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t+m\eta)|$. Здесь используем то обстоятельство, что η — квадратичная иррациональность, и числа $t+m\eta$ хорошо приближаются несократимыми дробями со знаменателями, которые «не слишком малы» и «не слишком велики». Тогда интеграл

$$\int_E |S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)| dt$$

оценивается как

$$\ll \left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right)|S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)| dt \ll$$
$$\ll \pi(N)\left(\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)| + \max_{t\in E_2}|S(t)|\right) \ll$$
$$\ll N^2 \ln^{-C} N$$

и попадает в остаток.

4. Пусть в задаче Хуа Ло–Кена

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N$$

простые числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 принадлежат специальному множеству

$$\mathcal{P} = \{p \mid a < \{\eta p^2\} < b\}.$$

Теорема 2 *Справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)s(N,a,b) + O(N^{3/2-0,00002}),$$

где

$$s(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

5. Рассмотрим задачу со специальными целыми числами, где приближенное равенство, подобное (1), выполняется. Пусть $I(N)$ — число решений задачи Лагранжа

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N$$

в целых числах l_1, l_2, l_3, l_4. Известно, что (см. [5])

$$I(N) = \pi^2 N \sum_{1\le q} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^2/q}$$

— сумма Гаусса, ε — произвольное положительное число.

Пусть

$$\mathcal{A} = \{l \mid a < \{\eta l\} < b\}$$

— подмножество множества целых чисел, $J(N)$ — число решений задачи Лагранжа в целых числах из множества $\mathcal{A}$. Тогда выполняется приближенное равенство

$$J(N) \sim \mu^4(\mathcal{A}) I(N),$$

где $\mu(\mathcal{A})$ — «плотность» множества $\mathcal{A}$.

Теорема 3 *Для любого положительного малого ε справедлива формула*

$$J(N) = (b-a)^4 I(N) + O(N^{7/8+\varepsilon}).$$

6. Можно предположить, что для уравнений вида

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$ из множества

$$\mathcal{A} = \{x \mid a < \{\eta x^r\} < b\},$$

при $r = n$ в формуле для числа решений будут присутствовать ряды, подобные рядам $\sigma(N,a,b), s(N,a,b)$ из теорем 1, 2.

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел //ДАН СССР, 1937. Т.15, с. 169—172.

2. L.K. Hua, Some results in the additive prime number theory, Quart. J. Math., 9 (1938), p. 68—80.

3. Хуа Ло–ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964.

4. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида //УМН, 1988. Т. 43, вып.4 (262), с.203-204.

5. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ //Acta mathematica, 49, 1926, p. 407—464.

ADDITIVE PROBLEMS WITH GIVEN NUMBERS

S.A. Gritsenko, N.N. Motkina

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The object of the present paper is to treat the additive problems such as ternary problem of Goldbach, Hua Loo Keng's problem and Lagrang's problem with given numbers. We have got an asymptotic formulas for the number of solutions of these problems.

Keywords: additive problems, primes of special type, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.И. Кожанов

Институт математики им. С.Л. Соболева,

пр. Академика Коптюга, 4,630090, г. Новосибирск, Россия, e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Аннотация. Для уравнений соболевского типа, называемых также псевдопараболическими, исследуется разрешимость некоторых задач нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от временной переменной. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, неизвестный коэффициент, обратная задача, интегральное условие переопределения, регулярные решения.

Коэффициентными обратными задачами в литературе принято называть задачи, в которых вместе с решением того или иного уравнения с частными производными требуется найти также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов; в исследование разрешимости таких задач существенный вклад внесли М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, Ю.Е. Аниконов, А.И. Прилепко, Ю.Я. Белов, Д.С. Аниконов, А.М. Денисов, А. Лоренци, М.И. Иванчов, С.И. Кабанихин, Б.А. Бубнов, Г.Н. Ерохин, В. Исаков, Д.Г. Орловский, Дж. Кэннон, М. Клибанов, М. Ямамото (достаточно полную библиографию работ последнего времени, связанных с исследованием разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений с частными производными, можно найти в монографиях [1–14]). Значительно менее изученными представляются коэффициентные обратные задачи для неклассических уравнений; в частности, для уравнений соболевского типа. Близкие по постановке задачи, но для уравнений второго порядка по времени (в настоящей работе изучаются коэффициентные обратные задачи для уравнений соболевского типа первого порядка по времени) рассматривались в работах автора [15, 16]. В работах [17–21] изучались некоторые обратные задачи для псевдопараболических уравнений, но эти задачи существенно отличались по постановке от рассматриваемых в настоящей работе.

Используемая в настоящей работе техника основана на переходе от исследуемой обратной задачи к новой краевой задаче для так называемого «нагруженного» [22, 23] уравнения с частными производными, доказательство ее разрешимости и далее доказательство того, что решение нагруженного уравнения порождает решение рассматриваемой обратной задачи (примеры использования данной техники можно найти в указанных выше работах [15, 16]).

Отметим также следующее. Интерес со стороны автора к обратным задачам с неизвестным коэффициентом, зависящим лишь от временной переменной, объясняется не только стремлением к изучению новых математических задач, но и тем, что они возникают в приложениях — в задачах управления [24], в задачах со свободной границей [25, 26].

Работа поддержана РФФИ (грант 09–01–00422а), аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала» (грант АХ–23/11 пр. от 12 декабря 2008 г.)

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечнодифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ конечной высоты T, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j=1,\dots,n$, $b(x,t)$, $K(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $\mu(t)$ — заданные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$, функции. Далее, пусть B_1 и B_2 суть дифференциальные операторы

$$B_1u=b^{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,t)u_{x_i},\quad B_2u=b^{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Обратная задача I: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t-\Delta u_t-B_1u+q(t)u=f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x)\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx=\mu(t),\quad t\in(0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$q(t)u_t-\Delta u_t-B_2u=f(x,t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)–(4).

В рассматриваемых обратных задачах I и II условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа первого порядка по времени, условие же (4) есть интегральное условие переопределения, наличие которого диктуется наличием дополнительной неизвестной функции.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}$ следующее пространство

$$\overset{\circ}{V}=\{v(x,t):\quad v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$v_t(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))\};$$

норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}}=\|v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|\Delta v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|\Delta v_t\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Для компактности формулировки теоремы о разрешимости обратной задачи I понадобятся некоторые предварительные сведения и обозначения.

Пусть β есть положительное число, $\widetilde{B}_1$ есть оператор $B_1-\beta\Delta$. При выполнении условий ограниченности функций $b^{ij}(x,t)$ и $b^i(x,t)$ для функций $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняется неравенство

$$\|\widetilde{B}_1v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\le b_1\|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+b_2\|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{6}$$

Положим

$$F(t) = \int\limits_{\Omega} K(x,t) f(x,t)\,dx, \quad h(t) = \frac{F(t) - \mu'(t)}{\mu(t)}, \quad \mu_0 = \min_{0\le t\le T} \mu(t).$$

Пусть $v(x,t)$ есть произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{V}$. Определим функции $\varphi(t,v)$ и $q(t,v)$:

$$\varphi(t,v) = \int\limits_{\Omega} K_t(x,t) v(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} K(x,t)\Delta v_t(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} K(x,t) B_1 v(x,t)\,dx,$$

$$q(t,v) = h(t) + \frac{\varphi(t,v)}{\mu(t)}.$$

Если функции $h(t)$, $K(x,t)$, $K_t(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, ограничены, число μ_0 положительно, то имеют место неравенства

$$|q(t,v_1) - q(t,v_2)| \le m_0 \|v_1 - v_2\|_{\overset{\circ}{V}}, \tag{7}$$

$$\varphi^2(t,v) \le m_1 \int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + m_2 \int\limits_{\Omega} [\Delta v(x,t)]^2\,dx + m_3 \int\limits_{\Omega} [\Delta v_t(x,t)]^2\,dx, \tag{8}$$

в которых $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ и $v(x,t)$ суть произвольные функции из пространства $\overset{\circ}{V}$, постоянные m_0, m_1, m_2 и m_3 определяются функциями $\mu(t)$, $K(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$.

Положим далее

$$h_0 = \min_{0\le t\le T} h(t), \quad h_1 = \max_{0\le t\le T} h(t), \quad b_0 = \min(1+b_1, 1+b_2),$$

$$N_1 = \int\limits_{\Omega} u_0^2(x)\,dx + 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{0x_i}^2(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} [\Delta u_0(x)]^2\,dx + 2\int\limits_{Q} f^2\,dx\,dt,$$

$$N_2 = N_1 \exp(2b_0 T), \quad N_3 = 4(\beta^2 + b_1 + b_2)N_2 + 4\,\underset{0\le t\le T}{\operatorname{vrai\,max}} \left[\int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\,dx\right],$$

$$N_4 = N_3 + 8N_2 h_1, \quad R_1 = \frac{N_4 + 4N_2^2(m_1+m_2)}{1 - 4N_2 m_3}, \quad R_2 = 2N_2 m_0^2 T \exp(2b_0 T),$$

$$R_3 = 4N_2 m_0^2 + 4(\beta^2 + b_1 + b_2 + \mu_0^2 h_0^2) R_2.$$

Теорема 1 *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} b^{ij}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b^i(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad K(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \\ \mu(t) \in C^1([0,T]), \quad f(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega); \end{gathered} \tag{9}$$

$$\mu_0 > 0, \quad h_0 > 0; \tag{10}$$

$$4N_2 m_3 < 1, \quad R_2 + R_3 < 1, \quad h_1 + m_1^{\frac12} N_2^{\frac12} + m_2^{\frac12} N_2^{\frac12} + m_3^{\frac12} R_1^{\frac12} \le \mu_0 h_0; \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x,0)u_0(x)\,dx = \mu(0). \tag{12}$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Воспользуемся комбинацией метода срезок и метода неподвижной точки.

Заметим прежде всего, что вследствие условия (9) и первого неравенства условия (10) будут выполняться неравенства (7) и (8).

Определим срезывающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad |\xi| \le h_0\mu_0, \\ h_0, & \text{если} \quad \xi > h_0\mu_0, \\ -h_0, & \text{если} \quad \xi < -h_0\mu_0. \end{cases}$$

Далее определим функцию $\tilde{q}(t,v)$:

$$\tilde{q}(t,v) = h(t) + \frac{1}{\mu(t)} G(\varphi(t,v));$$

очевидно, что функция $\tilde{q}(t,v)$ будет неотрицательной при $t \in [0,T]$, $v(x,t) \in \overset{\circ}{V}$.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,u)u = f(x,t) \tag{13}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Разрешимость краевой задачи (13), (2), (3) докажем с помощью теоремы о сжимающих отображениях.

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства $\overset{\circ}{V}$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,v)u = f(x,t) \tag{13_v}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Краевая задача (13_v), (2), (3) представляет собой первую начально-краевую задачу для линейного уравнения соболевского типа; при выполнении условия (9) эта задача разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}$ — см. [27, 28]. Следовательно, рассматриваемая краевая задача порождает оператор Φ, переводящий пространство $\overset{\circ}{V}$ в себя: $\Phi(v) = u$. Покажем, что оператор Φ имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}$ неподвижную точку.

Интегрируя по частям в равенстве

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} [u_\tau - \Delta u_\tau - \beta\Delta u - \widetilde{B}_1 u + \tilde{q}(t,v)u](u - \Delta u)\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f(u - \Delta u)\,dx\,d\tau,$$

учитывая неотрицательность функции $\tilde{q}(t,v)$, используя неравенство (6), а также неравенство Юнга, получаем, что для решений краевой задачи (13_v), (2), (3) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\{u^2(x,t)+[\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le N_1 + 2b_0\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[u^2+(\Delta u)^2]\,dx\,d\tau.$$

Из этого неравенства и леммы Гроноулла следует, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (13_v), (2), (3) имеет место первая априорная оценка

$$\int\limits_{\Omega}\{u^2(x,t)+[\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le N_2. \tag{14}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{\Omega}[u_t(x,t)-\Delta u_t(x,t)-B_1u(x,t)+\tilde{q}(t,v)u(x,t)]\Delta u_t(x,t)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} f(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx.$$

Это равенство легко преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega} u_{x_it}^2(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega} B_1u(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx - \tilde{q}(t,v)\int\limits_{\Omega} u(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx.$$

Оценивая правую часть данного равенства с помощью неравенства Юнга, а также используя неравенства (6) и (14), получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le N_3 + 4N_2\tilde{q}^2(t,v). \tag{15}$$

Очевидное неравенство $|\tilde{q}(t,v)| \le h_1 + |\varphi(t,v)|$, а также неравенство (8) дают возможность продолжить оценку (15):

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le N_4 + 4N_2\left\{m_1\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + m_2\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x,t)]^2\,dx + \right.$$

$$\left. + m_3\int\limits_{\Omega}[\Delta v_t(x,t)]^2\,dx\right\}. \tag{16}$$

Определим множество W:

$$W = \{v(x,t): \int_\Omega v^2(x,t)\,dx + \int_\Omega [\Delta v(x,t)]^2\,dx \le N_2,\ \int_\Omega [\Delta v_t(x,t)]^2\,dx \le R_1\}.$$

Очевидно, что множество W замкнуто и ограничено в пространстве $\overset{\circ}{V}$. Далее, вследствие первого неравенства условия (11), указанного выше выбора числа R_1 и неравенств (14) и (16) при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_v), (2), (3) будут выполняться неравенства, определяющие множество W. Следовательно, оператор Φ переводит множество W в себя. Покажем, что оператор Φ будет сжимающим на множестве W.

Пусть $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ суть функции из множества W, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения краевых задач (13_{v_1}), (2), (3) и (13_{v_2}), (2), (3) соответственно, $v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Имеют место равенства

$$u_t - \Delta u_t - B_1 u + \tilde{q}(t,v_1)u = [\tilde{q}(t,v_2) - \tilde{q}(t,v_1)]u_2; \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{18}$$

$$u(x,t)|_S = 0. \tag{19}$$

Повторяя доказательство оценки (14) и используя неравенство (7), получаем неравенство

$$\int_\Omega \{u^2(x,t) + [\Delta u(x,t)]^2\}\,dx \le 2N_2 m_0^2 T \exp(2b_0 T)\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}} = R_2\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}}. \tag{20}$$

Далее, повторяя доказательство неравенства (16), используя неравенства (7) b (20), получаем вторую оценку

$$\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le R_3\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}}. \tag{21}$$

Оценки (20) и (21) вместе со вторым неравенством условия (11) и означают, что оператор Φ будет сжимающим на множестве W.

Согласно теореме о сжимающих отображениях, оператор Φ имеет на множестве W неподвижную точку. Эта неподвижная точка представляет собой решение краевой задачи (13), (2), (3). Вследствие третьего неравенства условия (11) для решения $u(x,t)$ данной краевой задачи будет выполняться равенство

$$G(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u).$$

Положим

$$q(t) = h(t) + \frac{\varphi(t,u)}{\mu(t)}. \tag{22}$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Покажем, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие (4).

Умножим уравнение (1) с функцией $q(t)$, определенной равенством (22), на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Полученное равенство и представление функции $q(t)$ дадут равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \mu(t)\right] = 0.$$

Из этого равенства и из условия (12) и следует, что для найденной функции $u(x,t)$ выполняется условие переопределения (4).

Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна.

Теорема доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи II.

Положим

$$\mu_1 = \min_{0\le t\le T} \mu'(t), \quad k_0 = \min_{0\le t\le T} F(t)$$

(ниже будет предполагаться, что эти числа положительны). Для произвольной функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ определим функции $\psi_1(t,v)$, $\psi_2(t,v)$ и $q_1(t)$:

$$\psi_1(t,v) = \int\limits_\Omega K(x,t)\Delta v_t(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega K(x,t)B_2 v(x,t)\,dx,$$

$$\psi_2(t,v) = \int\limits_\Omega K_t(x,t)v(x,t)\,dx,$$

$$q_1(t,v) = \frac{F(t)+\psi_1(t,v)}{\mu'(t)-\psi_2(t,v)}.$$

Пусть оператор B_2 таков, что для всех функций $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega [B_2 v(x,t)]^2\,dx \le \overline{b}_2 \int\limits_\Omega [\Delta v(x,t)]^2\,dx. \tag{6'}$$

Далее, для функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega v^2(x,t)\,dx \le c_0 \int\limits_\Omega [\Delta v(x,t)]^2\,dx \tag{6''}$$

с постоянной c_0, определяющейся лишь областью Ω (см. [29]).

Пусть μ_2 есть фиксированное число из интервала $(0,\mu_1)$. Определим срезывающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \textit{если} \quad |\xi|\le k_0, \\ k_0, & \textit{если} \quad \xi > k_0, \\ -k_0, & \textit{если} \quad \xi < -k_0, \end{cases} \qquad G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \textit{если} \quad |\xi|\le \mu_2, \\ \mu_2, & \textit{если} \quad \xi > \mu_2, \\ -\mu_2, & \textit{если} \quad \xi < -\mu_2. \end{cases}$$

Определим функцию $\tilde{q}_1(t,v)$:

$$\tilde{q}_1(t,v) = \frac{F(t)+G_1(\psi_1(t,v))}{\mu'(t)-G_2(\psi_2(t,v))}.$$

Заметим, что для любых функций $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}$ выполняется неравенство

$$|\tilde{q}_1(t,v_1)-\tilde{q}_1(t,v_2)| \le \overline{m}_0 \|v_1 - v_2\|_{\overset{\circ}{V}}$$

с постоянной $\overline{m}_0$, определяющейся функциями $f(x,t)$, $\mu(t)$, $K(x,t)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b(x,t)$, а также числом μ_2.

Положим далее

$$M_1 = \left\{2\,\underset{0\le t\le T}{\mathrm{vrai}\max}\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx + 2\overline{b}_2\int\limits_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\,dx\right\}\exp(4\overline{b}_2T^2),$$

$$M_2 = 2T^2M_1 + 2\int\limits_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\,dx, \quad M_3 = 2c_0\overline{m}_0^2M_1\exp(2T^2\overline{b}_2),$$

$$M_0 = M_3[1+(1+c_0)T^2],$$

$$K_1 = \max_{0\le t\le T}\left(\int K^2(x,t)dx\right)^{\frac12}, \quad K_2 = \max_{0\le t\le T}\left(\int K_t^2(x,t)dx\right)^{\frac12}.$$

Теорема 2 *Пусть выполняются условия* (9) *и* (12) *теоремы* 1, *а также условия*

$$\mu_1 > 0, \quad k_0 > 0; \tag{10$'$}$$

$$M_0 < 1, \quad K_1\left[M_1^{\frac12} + (\bar{b}_2M_2)^{\frac12}\right] \le k_0, \quad K_2(c_0M_2)^{\frac12} \le \mu_2. \tag{11$'$}$$

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\{u(x,t), q(x,t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство этой теоремы проводится в целом аналогично доказательству теоремы 1. Вспомогательной линеаризованной задачей здесь будет следующая: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\tilde{q}_1(t,v)u_t - \Delta u_t - B_2u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Разрешимость ее при принадлежности функции $v(x,t)$ пространству $\overset{\circ}{V}$ известна, априорные оценки и теорема о сжимающих отображениях позволят установить разрешимость соответствующей нелинейной задачи и далее — разрешимость обратной задачи II.

Сделаем несколько замечаний.

1. В множестве W и в соответствующем множестве

$$W_1 = \left\{v(x,t) \in \overset{\circ}{V}\cdot\int\limits_\Omega v^2(x,t)\,dx \le c_0M_2,\right.$$

$$\left.\int\limits_\Omega [\Delta v(x,t)]^2dx \le M_2,\ \int\limits_\Omega [\Delta v_t(x,t)]^2dx \le M_1\right\}$$

обратные задачи I и II имеют ровно одно решение.

2. Первое и второе неравенства условия (11) выполняются, например, в случае малости числа N_2; число же N_2 будет малым, если малы функции $u_0(x)$, $u_{0x_i}(x)$, $i = 1,\dots,n$,

$\Delta u_0(x)$, $f(x,t)$, а также если мала область Ω. Третье неравенство условия (11) выполняется, например, в случае, если число N_2 мало и выполняется

$$\min_{0\le t\le T}[F(t)-\mu'(t)]>0, \quad \mu_0>1.$$

Другими словами, множество обратных задач I, для которых выполняются все условия теоремы 1, не пусто.

3. Условие ($11'$) теоремы 2 выполняется, например, в случае малости функций $f(x,t)$, $\Delta u_0(x)$ и малости области Ω.

Литература

1. В.Г. Романов. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, М.: Наука, 1972.
2. Yu.E. Anikonov. Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations, Utrecht: VSP, 1995.
3. Yu.E. Anikonov. Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems, Utrecht: VSP, 1997.
4. Yu.E. Anikonov, B.A. Bubhov, G.N. Erokhin. Inverse and Ill-Posed Source Problems, Utrecht: VSP, 1997.
5. A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999.
6. A.M. Denisov. Elements of the Theory of Inverse Problems, Utrecht: VSP, 1999.
7. Yu.E. Anikonov. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations, Utrecht: VSP, 2001.
8. A. Lorenzi. An Introduction to Mathematical Problems via Functional Analysis, Utrecht: VSP, 2001.
9. Yu.Ya. Belov. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht: VSP, 2002.
10. V.G. Romanov. Investigation Methods for Inverse Problems, Utrecht: VSP, 2002.
11. M.M. Lavrentiev. Inverse Problems of Mathematical Physics, Utrecht: VSP, 2003.
12. V. Isakov. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Berlin: Springer, 2006.
13. M. Ivanchov. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL Publishers, 2003.
14. В.Г. Романов. Устойчивость в обратных задачах, М.: Научный мир, 2005.
15. А.И. Кожанов. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. Т. 8, вып. 3. 2008. С. 81–99.

16. А.И. Кожанов. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Вып. 1, № 15. 2008. С. 27–36.

17. Э.Р. Атаманов, М.Ш. Мамаюсупов. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений, Фрунзе: Илим, 1990.

18. Б.С. Аблабеков. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений, Бишкек: Илим, 2001.

19. Б.С. Аблабеков. Обратная задача для уравнения Бенджамена — Бона — Махони // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 6–9.

20. С.Г. Пятков. О разрешимости некоторых классов обратных задач // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 61–66.

21. А.И. Кожанов. О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для уравнений составного типа // Материалы III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Нальчик: 2006. С. 159–164.

22. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа, 1995.

23. М.Т. Дженалиев. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений, Алматы: Институт теоретической и прикладной математики, 1995.

24. Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. V. 4. 1988. P. 35–45.

25. М.I. Iванчов. Редукцiя задачi з вильною межею для параболiчного рiвняння до оберненой задачi // Нелинейные граничные задачи. Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2002, С. 73–83.

26. М.I. Iванчов. Обернена задача з вильнаю межею для рiвняння теплопроводностi // Украинский математический журнал. 2003. Т. 55, No. 7. С. 901–910.

27. С.Я. Якубов. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения, Баку: Элм, 1985.

28. A.I. Kozhanov. Composite Type Equations and Inverse Problems, Utrecht (Netherlands): VSP, 1999.

29. О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М.: Наука, 1973.

SOLVABILITY OF COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR SOME EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE

A.I. Kozhanov

Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Akademika Koptjuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Abstract. By method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and methods of finding solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels in weighted complex Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

Keywords: nonlinear integral equations, potential type operators, weighted Lebesgue spaces, method of monotone operators.

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КРАТНОГО РЯДА ЛОРАНА

А.П. Ляпин

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, 660041, г. Красноярск, Россия, e-mail: LyapinAP@yandex.ru

Аннотация. В данной работе приведена конструкция преобразования кратного ряда Лорана, обобщающая классическую композицию Гурвица двух однократных рядов и связанная с многомерными аналогами теоремы Полиа.

Ключевые слова: преобразование Гурвица, радиальный индикатор, теорема Полиа.

1 Введение

Теорема Гурвица о сложении особенностей относится к числу значимых результатов в теории распределения особенностей голоморфных функций одного переменного. В отличие от теоремы Адамара об умножении особенностей (см. [1]), которая обобщалась на многомерный случай в различных направлениях, (см. [2] — [6]), многомерные варианты композиции Гурвица степенных рядов изучались сравнительно мало (см. [7]).

В п. 2 приведена конструкция преобразования кратного степенного ряда в однократный, которая естественным образом возникает в исследованиях, связанных с многомерными аналогами теоремы Полиа ([8], [9]). Эта конструкция названа преобразованием Гурвица, так как классическая композиция Гурвица степенных рядов является её частным случаем. Для преобразования Гурвица построено интегральное представление (предложение 1), которое позволяет осуществить ее аналитическое продолжение (теорема 2).

В п. 3 изучено преобразование Гурвица рациональных функций. В случае одного переменного композиция Гурвица рациональных функций будет функцией рациональной, однако в многомерном случае это уже не так. В теореме 3 доказывается алгебраичность преобразования Гурвица рациональной функции двух переменных.

Отметим, что доказательство теоремы 3 существенно опирается на теорему об особенностях параметрического вычета Гротендика ([10], [11]). Все доказательства приведены в п. 4.

2 Преобразование Гурвица кратного степенного ряда

Композиция Гурвица для двух однократных рядов вида

$$f(z)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+1}} \text{ и } g(z)=\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{b(\beta)}{z^{\beta+1}} \tag{1}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Государственным фондом естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках совместного проекта «Комплексный анализ и его приложения» (проект N 08-01-92208_ГФЕН) и грантом СФУ

определяется следующим образом (см. [1, с. 47]):

$$h(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha+\beta=m}\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}a(\alpha)b(\beta)\right)\frac{1}{z^{m+1}}, \tag{2}$$

и задача состоит в том, чтобы по известным особым точкам функций $f(z)$ и $g(z)$, определенных рядами (1), найти особые точки композиции $h(z)$. Приведем теорему Гурвица о сложении особенностей, решающую эту задачу, в изложении Бибербаха (см. [1]). Но прежде нам понадобятся следующие определения.

Суммой множеств A_1 и A_2 назовем дополнение теоретико-множественной суммы $A_1'+A_2'=\{a_1'+a_2' : a_1'\in A_1', a_2'\in A_2'\}$ до всей комплексной плоскости:

$$A_1\oplus A_2 := (A_1'+A_2')',$$

где $A'=\mathbb{C}\setminus A$.

Указанная композиция множеств (как и композиция Гурвица степенных рядов) обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Теорема 1 ([12], 1899) *Если функция $f(z)$ голоморфна в области A, содержащей множество $\{|z|>r_1\}$, а функция $g(z)$ голоморфна в области B, содержащей множество $\{|z|>r_2\}$, то функция $h(z)$ голоморфна в связной части открытого множества $A\oplus B$, содержащей внешность круга $\{|z|>r_1+r_2\}$.*

Отметим, что композиция Гурвица (2) тесно связана с имеющим важное значение в теории распределения особенностей голоморфных функций преобразованием Бореля степенных рядов. А именно, если

$$F(z)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a(\alpha)}{\alpha!}z^{\alpha}, G(z)=\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{b(\beta)}{\beta!}z^{\beta}$$

– преобразование Бореля функций $f(z)$ и $g(z)$ соответственно, тогда их произведение

$$F(z)G(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha+\beta=m}\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}a(\alpha)b(\beta)\right)\frac{z^m}{m!}$$

является преобразованием Бореля композиции Гурвица (2) рядов $f(z)$ и $g(z)$.

Приведем вариант обобщения композиции Гурвица на случай кратных степенных рядов Тейлора, построенный в работе [7]. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество целочисленных векторов с неотрицательными компонентами, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\alpha!=\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!$. Для заданного набора $m\,(m\leqslant n)$ целых чисел $J=(j_1,\ldots,j_m)$, таких, что $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_m=n$ и $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, обозначим через $J\alpha$ следующий вектор из $\mathbb{Z}_+^m$:

$$J\alpha=(\alpha_1+\ldots+\alpha_{j_1},\alpha_{j_1+1}+\ldots+\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_{m-1}+1}+\ldots+\alpha_{j_m}).$$

Для двух n-кратных степенных рядов

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}a(\alpha)z^{\alpha} \text{ и } g(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}b(\alpha)z^{\alpha}, z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$$

под *композицией Гурвица, ассоциированной с полной m-круговой областью* $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^m$, понимается n-кратный ряд вида

$$h(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \left[\sum_{\beta \leqslant \alpha} a(\alpha - \beta) b(\beta) \frac{c_{J\alpha}(J\alpha)!}{c_{J\beta}(J\beta)! c_{J\alpha - J\beta}(J\alpha - J\beta)!} \right] z^\alpha, \tag{3}$$

где $c_{J\alpha}$ — коэффициенты Тейлора ядра Сеге некоторой фиксированной m-круговой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^m$.

В работе [7] построено интегральное представление и изучен вопрос об области сходимости композиции, а именно показано, что ряд (3) можно продолжить в подходящим образом определенную «сумму» звезд и рассматриваются свойства такой «суммы».

В данной статье приведен другой вариант обобщения конструкции Гурвица для $n > 1$, который естественным образом связан с преобразованием Бореля кратных степенных рядов и многомерными аналогами теоремы Полиа.

Будем рассматривать кратные ряды Лорана вида

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha + I}}, \tag{4}$$

которые сходятся в некоторой окрестности $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| > R_j, j = 1, \dots, n\}$ бесконечно удаленной точки (это равносильно голоморфности функции $f(1/z)$ в точке $z = 0$). Ряду (4) поставим в соответствие кратный степенной ряд

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{a(\alpha)}{\alpha!} z^\alpha, \tag{5}$$

который называется *преобразованием Бореля* ряда (4), при этом функции $f(z)$ и $F(z)$ называются *ассоциированными по Борелю*. Если известно, что функция $f(z)$ голоморфна в бесконечно удаленной точке, то функция $F(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, т.е порядка не выше первого и не более, чем нормального типа ([13]).

Для целой функций $F(z)$ переменного z порядка ρ *индикатор* определяется формулой

$$h_F(\varphi) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln |F(te^{i\varphi})|}{t^\rho}.$$

Далее, для $K \subset \mathbb{C}$ обозначим через $k_K(\varphi)$ опорную функцию множества $K \subset \mathbb{C}$

$$k_K(\varphi) = \max_{z \in K} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}).$$

Теорема Полиа утверждает, что для целых функций экспоненциального типа $h_F(\varphi) = k_K(-\varphi)$, где K — наименьший компакт, во внешность которого аналитически продолжается функция $f(z)$, ассоциированная по Борелю с $F(z)$.

Важной характеристикой для целой функции $F(z)$ нескольких переменных нормального типа и произвольного порядка ρ является *радиальный индикатор* ([13, с. 286]):

$$\mathbf{h}_{F,\lambda}(\varphi) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln |F(\lambda te^{i\varphi})|}{t^\rho},$$

т. е. это индикатор функции $F(\lambda\xi)$ одного комплексного переменного ξ, которая является сужением функции $F(z)$ на комплексную прямую $l_\lambda = \{z : z = \lambda\xi, \xi \in \mathbb{C}\}$. Поэтому представляется естественным следующее

Определение 1 *Для фиксированного вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ назовем преобразованием Гурвица ряда* (4) *преобразование Бореля функции $F(\lambda\xi)$, т.е. однократный ряд вида*

$$f_\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\|\alpha\|!\, \lambda^\alpha}{\alpha!}\, a(\alpha) \right) \frac{1}{\xi^{m+1}}. \tag{6}$$

Данная конструкция является обобщением классической композиции Гурвица степенных рядов (1). Действительно, при $n = 2$, $f(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2)$ и $\lambda = (1, 1)$ из соотношения (6) получим (2).

Приведем интегральное представление для преобразования Гурвица, которое позволит ниже получить аналитическое продолжение преобразования (6).

Для $z, \lambda \in \mathbb{C}^n$ обозначим $\langle \lambda, z \rangle = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ и $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, где $\wedge$ — знак внешнего произведения.

Предложение 1 *Если $f(z)$ голоморфна в области из $\mathbb{C}^n$, содержащей окрестность $\{z : |z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$ бесконечно удаленной точки, то преобразование Гурвица голоморфно для $\xi \in \mathbb{C}$ таких, что*

$$|\xi| > |\lambda_1| \cdot R_1 + \ldots + |\lambda_n| \cdot R_n,$$

и при этом справедливо интегральное представление

$$f_\lambda(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle},$$

где $\Gamma = \{z : |z_j| = |\lambda_j| R_j, j = 1, \ldots, n\}$

Множество комплексной плоскости $A \subset \mathbb{C}$ назовем *козвездой*, если оно содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и его дополнение $\mathbb{C} \setminus A$ до комплексной плоскости является звездой.

Отметим, что для любого набора козвезд $A_j, j = 1, \ldots, n$ и вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ множество вида

$$\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n := \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_n A_n'\}$$

также является козвездой.

Одним из основных результатов данной работы является следующая

Теорема 2 *Пусть $A_j, j = 1, ..., n$ — козвездные области. Если функция* (4) *голоморфна в области вида $A_1 \times \ldots \times A_n \subset \mathbb{C}^n$, то преобразование Гурвица ряда* (4) *голоморфно в козвездной области $\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n \subset \mathbb{C}$.*

Заметим, что из этой теоремы очевидным образом получаем неравенство $k_K(\varphi) \leqslant k_T(\varphi)$, где K — минимальный компакт особенностей преобразования Гурвица f_λ и $T = \{\lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_n A_n'\}$. В случае, если справедлива одномерная теорема Полиа $h_{\lambda,F}(\varphi) = k_K(\varphi)$, получаем оценку сверху на радиальный индикатор

$$h_{\lambda,F}(\varphi) \leqslant k_T(\varphi),$$

причем знак равенства имеет место, если этот минимальный компакт особенностей функции $f_\lambda(\xi)$ совпадает с множеством T.

3 Преобразование Гурвица рациональных функций

Для $n = 1$ классическая композиция Гурвица (2) рациональных функций $f(z)$ и $g(z)$ является рациональной функцией (см. [1]), причем ее особые точки получаются путем сложения особых точек функций (1). Для $n = 2$, вообще говоря, из рациональности функции не следует рациональность ее преобразования Гурвица. Например, для функции $f(z_1, z_2) = (1 - z_1 - z_2 - z_1 z_2)^{-1}$ ее преобразование Гурвица имеет вид

$$f_\lambda(\xi) = (\xi^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\xi + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 6\lambda_1\lambda_2)^{-\frac{1}{2}},$$

т.е. является алгебраической функцией.

Покажем, что преобразование Гурвица рациональной функции для $n = 2$ всегда является функцией алгебраической. Прежде всего выделим класс рациональных функций $f(z) = P(z)/Q(z)$, для которых имеет место разложение в ряд Лорана вида (4).

В случае $n = 1$ такие функции голоморфны в бесконечно удаленной точке и обращаются в ней в ноль. Если $Q(z) = \sum\limits_{\beta=0}^{m} q_z z^\beta$ многочлен степени m (т.е. $q_m \neq 0$), то для любого многочлена $P(z)$ степени, не превосходящей m, рациональная функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (4).

Пусть $n > 1$ и $Q(z) = \sum\limits_{\beta\in B} q_\beta z^\beta$ — многочлен переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, т.е. B — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^n_+$.

Многогранником Ньютона N_Q многочлена $Q(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ множества B.

Обозначим через $\nu = (\nu_1, ...\nu_n)$ точку из $\mathbb{Z}^n_+$, такую, что

$$\nu_j = \max_{\beta\in N_Q}\{\beta_j\}, j = 1, \ldots, n,$$

и будем рассматривать такие многочлены $Q(z)$, что

$$\nu \in N_Q. \tag{7}$$

Отметим, что целочисленная точка ν является вершиной многогранника Ньютона N_Q, т.е. $q_\nu \neq 0$. Кроме того, *двойственный конус*

$$C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n : \max_{\beta\in N_Q}\langle s, \beta\rangle = \langle s, \nu\rangle\}$$

многогранника N_Q в этой вершине ν содержит положительный октант

$$\mathbb{R}^n_+ \subset C_\nu. \tag{8}$$

Если обозначим $\Pi_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_j \leqslant \nu_j, j = 1, \ldots, n\}$ — *прямоугольный параллелепипед* в $\mathbb{R}^n_+$, то условие (8) эквивалентно условию

$$N_Q \subset \Pi_\nu.$$

Предложение 2 *Фиксируем многочлен $Q(z)$, удовлетворяющий условию (7). Рациональная функция $P(z)/Q(z)$ разлагается в ряд Лорана вида (4) тогда и только тогда, когда числитель $P(z)$ удовлетворяет условию*

$$N_P \subset \Pi_{\nu-I}, \tag{9}$$

где $I = (1, \ldots, 1)$.

Если в предложении 2 отказаться от требования, что точка ν является вершиной многогранника N_Q, то дробь $P(z)/Q(z)$, вообще говоря, не будет голоморфной в бесконечно удаленной точке, например, если $f(z_1,z_2)=(z_1+z_2)^{-1}$, то функция $f(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2})=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}$, очевидно, не является голоморфной в нуле, т. е. функция $f(z_1,z_2)$ не голоморфна в бесконечно удаленной точке.

Если $Q(z)=Q_1^{r_1}(z)\cdots Q_n^{r_n}(z)$ — разложение многочлена $Q(z)$ на неприводимые множители, то обозначим $Q^*(z)=Q_1(z)\cdots Q_n(z)$.

Теорема 3 *При $n=2$ преобразование Гурвица (6) рациональной функции $P(z)/Q(z)$, голоморфной в бесконечно удаленной точке, является алгебраической функцией, особые точки которой содержатся в множестве точек $\xi\in\mathbb{C}$ вида*

$$\xi=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2,$$

где (z_1,z_2) — решения системы уравнений

$$Q^*(z_1,z_2)=\lambda_2Q^*_{z_1}(z_1,z_2)-\lambda_1Q^*_{z_2}(z_1,z_2)=0.$$

4 Доказательства

Доказательство 1 (Доказательство предложения 1) *По условию предложения $|\xi|>|\lambda_1|\cdot R_1+\cdots+|\lambda_n|\cdot R_n$, тогда для $z\in\Gamma$ из неравенства треугольника следует*

$$|\lambda_1z_1+\cdots+\lambda_nz_n|\leqslant|\lambda_1|\cdot R_1+\cdots+|\lambda_n|\cdot R_n<|\xi|,$$

это означает, что на остове Γ справедливо соотношение $|\xi|>|\lambda_1z_1+\cdots+\lambda_nz_n|$, поэтому функция $\frac{1}{\xi-\langle\lambda,z\rangle}$ разлагается на Γ в ряд геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\xi-\langle\lambda,z\rangle}=\sum_{\|\beta\|\geqslant0}\frac{\|\beta\|!}{\beta!}\frac{\lambda^\beta z^\beta}{\xi^{\|\beta\|+1}}.$$

Умножая полученное разложение на ряд (4) и почленно интегрируя по Γ, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma\frac{f(z)\,dz}{\xi-\langle\lambda,z\rangle}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma\sum_{\|\alpha\|\geqslant0}\frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+I}}\cdot\sum_{\|\beta\|\geqslant0}\frac{\|\beta\|!}{\beta!}\frac{\lambda^\beta z^\beta}{\xi^{\|\beta\|+1}}\,dz=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\|\alpha\|=m}\frac{\|\alpha\|!}{\alpha!}\frac{a(\alpha)\lambda^\alpha}{\xi^{\|\alpha\|+1}}=f_\lambda(\xi).$$

Сформулируем свойства композиции козвезд, необходимые для доказательства теоремы 2.

Лемма 1 *Если A и B — козвезды, то их сумма $A\oplus B$ также является козвездой.*

Из очевидного включения $A_1'+A_2'\subset B_1'+B_2'$ следует

Лемма 2 *Пусть $A_j,B_j,j=1,2$ являются козвездами. Тогда если $B_1\subset A_1,B_2\subset A_2$, то справедливо включение $B_1\oplus B_2\subset A_1\oplus A_2$.*

Рассмотрим зависящее от параметра z отображение $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определяемое формулой $\varphi_z(\xi) = z - \xi$.

Лемма 3 $A_1 \oplus A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A_1') \cap A_2' = \varnothing\}$.

Доказательство 2 *Докажем включение $A_1 \oplus A_2 \subset \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A_1') \cap A_2' = \varnothing\}$. Пусть $z \in A_1 \oplus A_2$, это означает, что $z \notin A_1' + A_2'$. Предположим, что пересечение $\varphi_z(A_1') \cap A_2'$ не пусто, т. е., найдется такая точка ξ, что $\xi \in \varphi_z(A_1')$ и $\xi \in A_2'$, откуда $\xi = z - \xi_1, \xi_1 \in A_1'$ или $z = \xi + \xi_1$, где $\xi_1 \in A_1'$, таким образом $z \in A_1' + A_2'$, противоречие, следовательно, $z \in \{z \in \mathbb{C} : \varphi_z(A_1') \cap A_2' = \varnothing\}$. Обратное включение доказывается аналогично.*

Лемма 4 *Пусть A_1 и A_2 — козвезды и компакт $K \subset A_1 \oplus A_2$, тогда найдутся козвезды B_1, B_2, такие, что $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, 2$, компакт $K \subset B_1 \oplus B_2$ и границы $\partial B_1, \partial B_2$ есть замкнутые контуры, охватывающие начало координат.*

Доказательство 3 *Пусть $z \in K$. Рассмотрим отображение $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида $\varphi_z(\xi) = z - \xi$, одним из свойств которого является $\varphi_z = \varphi_z^{-1}$. Также заметим, что если $z \in K$, то $0 \notin \varphi_z(A_j')$ для $j = 1, 2$. По лемме 3 выполняется $\varphi_z(A_1') \cap A_2' = \varnothing$ и $A_1' \cap \varphi_z(A_2') = \varnothing$, поэтому мы можем выбрать контур γ_1, разделяющий множества A_1' и $\varphi_z(A_2')$, таким образом, чтобы он охватывал начало координат, а множество B_1, где $\gamma_1 = \partial B_1$, было козвездным. Обозначим $\tilde{\gamma}_2 = \varphi_z(\gamma_1)$ и возьмем контур γ_2, разделяющий множества A_2' и $\varphi_z(B_1')$, таким образом, чтобы он охватывал начало координат, а множество B_2, где $\gamma_2 = \partial B_2$, было козвездным. Отметим, что контур γ_1 будет разделять множества A_1' и $\varphi_z(B_2')$. При таком выборе контуров будут выполняться следующие включения: $\varphi_z(B_1) \subset B_2$ и $\varphi_z(B_2) \subset B_1$, откуда следует, что при выбранном значении z справедливо $B_1' \cap \varphi_z(B_2') = \varnothing$ и $B_2' \cap \varphi_z(B_1') = \varnothing$. Согласно лемме 3, это означает, что $z \in B_1 \oplus B_2$. В силу непрерывности отображения φ_z по параметру z, это справедливо и для всех z из некоторой окрестности U_z точки $z \in K$.*

Набор $\{U_z\}_{z \in K}$ образует открытое покрытие компакта K. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U_{z_k}\}_{k=1}^{l}$. Для каждой точки $z_k, k = 1, 2, ..., l$, найдутся козвезды $B_{1,k}$ и $B_{2,k}$, такие, что $\bar{B}_{i,k} \subset A_i, i = 1, 2$ и $U_{z_k} \subset B_{1,k} \oplus B_{2,k}$. Согласно лемме 2 имеем $U_{z_k} \subset B_{1,k} \oplus B_{2,k} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k} \oplus \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$, тогда $K = \bigcup\limits_{k=1}^{l} U_{z_k} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k} \oplus \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$. Множества $B_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{1,k}$ и $B_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{2,k}$ есть козвезды и $\widetilde{K} \subset B_1 \oplus B_2$.

Лемма 5 *Пусть $k > 2$ и $A_1, \ldots, A_k$ — козвезды и задано некоторое множество $K \subset A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, такое, что его замыкание в $\bar{\mathbb{C}}$ является компактом, тогда найдутся козвезды $B_1, \ldots, B_k$, такие, что $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, \ldots, k$, множество $K \subset B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$ и границы $\partial B_1, \ldots, \partial B_k$ есть замкнутые контуры, охватывающие начало координат.*

Доказательство 4 *Для доказательства утверждения нужно последовательно применить лемму 4. Для простоты приведем его для случая $k = 3$. Так как $K \subset A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$, то по лемме 4 найдутся козвезды B_1 и $\tilde{B}_2$, такие, что $K \subset B_1 \oplus \tilde{B}_2$, причем $\bar{B}_1 \subset A_1$ и $\bar{\tilde{B}}_2 \subset A_2 \oplus A_3$. Опять применим лемму 4, найдем козвезды B_2, B_3, такие, что $\bar{\tilde{B}}_2 \subset B_2 \oplus B_3$, тогда $K \subset B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, где $\bar{B}_j \subset A_j, j = 1, 2, 3$.*

Доказательство 5 (Доказательство теоремы 2) *Рассмотрим компакт $K \subset A_1 \oplus \dots \oplus A_n$. Согласно лемме 5 найдутся козвезды B_j, такие, что $\bar{B}_j \subset A_j, \partial B_j = \gamma_j$ — замкнутые контуры, охватывающие начало координат и $K \subset B_1 \oplus \dots \oplus B_n$. Тогда зависящий от параметра ξ интеграл*

$$I(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle}, \tag{10}$$

где $\Gamma = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$, определяет голоморфную для $\xi \in K$ функцию. Действительно, по построению $\Gamma \subset A_1 \times \dots \times A_n$ и остается показать, что знаменатель подынтегрального выражения для любых $z \in K$ не обращается в нуль на Γ.

Допустим противное. Пусть имеет место $\Gamma \cap \{z \in \mathbb{C}^n : \xi - \langle \lambda, z \rangle = 0\} \neq \varnothing$. Это означает, что нашлась точка $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \Gamma \subset B_1' \times \dots \times B_n'$ такая, что $\xi = \lambda_1 z_1^{(0)} + \dots + \lambda_n z_n^{(0)}$. Так как $z_j^{(0)} \in B_j', j = 1, \dots, n$, то по свойствам композиции $\oplus$ имеем $\xi \notin B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ и, следовательно, $\xi \notin K$. Получили противоречие. Таким образом, интеграл представляет собой функцию, голоморфную на любом компакте K, содержащемся в козвезде $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, и, следовательно, голоморфную и во всей козвезде.

Для ξ из окрестности V_∞ точки $\xi = \infty$ в качестве цикла интегрирования можно взять для достаточно больших R_j цикл $\Gamma_\infty = \{z : |z_j| = R_j, j = 1, \dots, n\}$. Цикл Γ из (10) гомологичен для $z \in V_\infty$ циклу Γ_∞ в области $A_1 \times \ldots \times A_n \setminus \{z : \langle \lambda, z \rangle = \xi\}$, поэтому

$$I(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\infty} \frac{f(z)\,dz}{\xi - \langle \lambda, z \rangle};$$

откуда из предложения 1 следует, что $I(\xi) = f_\lambda(\xi)$ для $z \in V_\infty$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется понятие амебы многочлена и некоторые её свойства ([14]).

Амебой $\mathcal{A}_Q$ многочлена $Q(z)$ называется образ множества

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(z) = 0\} \tag{11}$$

при логарифмическом проектировании

$$Log : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Дополнение к амебе состоит из конечного числа связных компонент, ограниченного снизу числом вершин многогранника Ньютона, а сверху — числом целых точек пересечения $\mathcal{A}_Q \cap \mathbb{Z}^n$. Кроме того ([14]), каждой вершине ν многогранника Ньютона можно сопоставить непустую связную компоненту E_ν дополнения амебы $\mathcal{A}_Q$ и разложение в ряд Лорана функции $1/Q(z)$, сходящееся в $Log^{-1} E_\nu$.

Доказательство 6 (Доказательство предложения 2) *Необходимость. Пусть $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in A} p_\alpha z^\alpha$, где A — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}_+^n$ и $\mu_j = \max\limits_{\alpha \in N_P} \alpha_j$. В разложении (4) сделаем замену $z_j \to z_j^{-1}, j = 1, \dots, n$ и после преобразований получим*

$$z^{\nu - \mu - I} \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} f(x) z^x, \tag{12}$$

где $\widetilde{P}(z)$ *и* $\widetilde{Q}(z)$ *— многочлены, причем* $\widetilde{Q}(0) \neq 0$. *Поскольку правая часть последнего неравенства представляет собой голоморфную в ноле функцию, то* $\nu_j - \mu_j - 1 \geqslant 0$, *т.е.* $\mu_j \leqslant \nu_j - 1$ *для* $j = 1, \ldots, n$, *поэтому* $N_Q \subset \Pi_\mu \subset \Pi_{\nu - I}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (9). *Рассмотрим рациональную функцию* $\frac{1}{Q(z)}$ *и разложим ее в ряд Лорана следующим образом*

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{q_\nu z^\nu (1 - \widetilde{Q}(z))} = \frac{1}{q_\nu z^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{Q}^k(z),$$

отметим, что здесь $\widetilde{Q}(z)$ *многочлен относительно переменных* $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ *в силу условия* (7). *Возводя его в степень* k *и приводя подобные, получим ряд Лорана вида*

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{\mathcal{P}(x)}{z^{\nu + x}}. \tag{13}$$

В работе [14] показано, что этот ряд сходится в прообразе $Log^{-1} E_\nu$ *связной компоненты* E_ν *дополнения амёбы* A_Q *многочлена* Q, *соответствующей вершине* ν *многогранника Ньютона* N_Q, *причем двойственный конус* C_ν *к многограннику* N_Q *является асимптотическим для этой компоненты* E_ν, *т.е. вместе с каждой точкой* $u \in E_\nu$ *эта компонента содержит и весь конус* $u + C_\nu$. *Из условия* (8) *следует, что полученный ряд сходится в окрестности бесконечно удаленной точки* $\{|z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$. *Умножая разложение* (13) *на любой моном* z^α, *такой, что* $\alpha \in \Pi_\nu$, *получим ряд, сходящийся в этой же окрестности. Поскольку* $N_P \subset \Pi_{\nu - I}$, *то при умножении* (13) *на многочлен* $P(z)$ *получим ряд вида* (4), *сходящийся в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.*

Доказательство 7 (Доказательство теоремы 3) *Согласно предложению 1 найдутся такие* R_1 *и* R_2, *для которых при* $|\xi| > |\lambda_1| R_1 + |\lambda_2| R_2$ *справедливо интегральное представление*

$$f_\lambda(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{P(z_1, z_2)\, dz_1 \wedge dz_2}{Q(z_1, z_2)(\xi - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)}, \tag{14}$$

где цикл $\Gamma = Log^{-1} u$, *и* $u \in E_\nu$, *и* $\xi - \langle \lambda, z \rangle \neq 0$ *на* Γ.

К указанному интегралу применима теорема об особенностях параметрического вычета Гротендика (см. [10] или [11]). Действительно, ограничение (9) *на степень числителя* $P(z)$ *означает, что при переходе к однородным координатам* $z_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, z_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$ *бесконечно удаленная комплексная прямая* $\{\xi_0 = 0\}$ *не может быть особенностью подынтегральной формы из интеграла* (14) *при компактификации комплексного пространства* $\mathbb{CP}^2$, *поэтому преобразование Гурвица будет алгебраической функцией и может иметь особенности лишь на множестве точек, определяемом системой уравнений*

$$Q^*(z_1, z_2) = J(z_1, z_2) = 0,$$

где $J = J(z_1, z_2) = \lambda_2 Q^*_{z_1} - \lambda_1 Q^*_{z_2}$ *— якобиан многочленов* Q^* *и* $\xi - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2$ *по переменным* z_1, z_2. *Таким образом, особые точки преобразования* $f_\lambda(\xi)$ *можно найти как сумму* $\xi = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, *где* $(z_1, z_2) \in \mathcal{V}$ *и* $\lambda_2 Q^*_{z_1}(z_1, z_2) = \lambda_1 Q^*_{z_2}(z_1, z_2)$, *а* $\mathcal{V}$, *как и прежде, определяется уравнением* (11).

Литература

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука. 1967.
2. Haustus M.L.T., Klarner D.A. The diagonal of a double power series. Duke Math. J. 1971. V. 38. №2. P. 229-235.
3. Odoni R.W.K. On the norms of algebraic integers. Mathematica. 1975. V. 22. P. 71-80.
4. Лейнартас Е.К. Об одном обобщении произведения Адамара в $\mathbb{C}^n$. Мат. заметки. 1982. Т. 32. №4. С. 477-482.
5. Лейнартас Е.К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования. Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. №2. С. 102-107.
6. Sadykov T. M. The Hadamard product of hypergeometric series. Bulletin des Sciences Mathematiques. 2002. V. 126. № 1. P. 31-43.
7. Елин М.М. Многомерный аналог композиции Гурвица. Изв. вузов. Матем. 1985. №2. С. 22-27.
8. Трутнев В.М. Радиальный индикатор в теории суммирования Бореля и некоторые применения Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. №3. С. 659-664.
9. Маергойз Л.С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике или биофизике. / Л.С. Маергойз. Новосибирск. Наука. 1991.
10. Сафонов К.В., Цих А.К. Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда. Изв. вузов. Матем. 1984. №4. С. 51—58.
11. Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1988.
12. Hurwitz A. Sur un theoreme de M. Hadamard. C. R. Acad. Sci. (Paris) 128. 350-353 (1899).
13. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. Москва: Наука, 1971.
14. Forsberg M., Passare M., Tsihk A. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas // Advances in Math., 2000, V. 151, P. 45-70.

ON A TRANSFORMATION OF MULTIPLE LAURENT SERIES

A.P. Lyapin

Siberian Federal University,
Svobodny Prospect, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia, e-mail: LyapinAP@yandex.ru

Abstract. In this paper we present a multiple transformations of the Laurent series, which generalizes the classical Hurwitz's composition of two single series and related with multidimensional analogues of Polya's theorem.

Keywords: Hurwitz transtormation, radial indicator, Polya's theorem.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕСЖИМАЕМОМ УПРУГОМ СКЕЛЕТЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА: СЛУЧАЙ ОДНОСКОРОСТНОГО КОНТИНУУМА

Л.Ф. Маслакова, А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: maslakova@bsu.edu.ru,meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и жидкости, заполняющей поры. Исследуемая модель, несмотря на ее линейность, очень сложна так как основные дифференциальные уравнения содержат под знаком производных недифференцируемые быстро осциллирующие коэффициенты. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений (т.е. уравнений не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов), которыми, при различных комбинациях физических параметров задачи, будет система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ для перемещения смеси жидкости и упругого тела (односкоростной континуум).

Ключевые слова: уравнения Стокса, уравнения Ламэ, уравнения Био, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о фильтрации несжимаемой вязкой жидкости в несжимаемом упругом скелете. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = L\mathbf{w},$$

$$\rho_s' = \rho_0\rho_s, \quad \rho_f' = \rho_0\rho_f, \quad \mathbf{F}' = g\mathbf{F}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L},$$

дифференциальные уравнения модели в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ примут вид:

$$\mathrm{div}\mathbb{P} + \rho^\varepsilon \mathbf{F} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{w} = 0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{w}$-перемещение среды,

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}$$

есть тензор напряжений сплошной среды, равный тензору вязких напряжений

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) - \chi^\varepsilon p\,\mathbb{I}$$

в области Ω_f^ε, занятой жидкостью и тензору упругих напряжений

$$\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - (1 - \chi^\varepsilon) p\, \mathbb{I}$$

в области Ω_s^ε, занятой упругим твердым скелетом, χ^ε – характеристическая функция области Ω_f^ε, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\mathbb{D}(x, \mathbf{u})$ – симметричная часть градиента вектор-функции $\mathbf{u}$, p – давление в сплошной среде,

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\rho_s,$$

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0},$$

μ –вязкость жидкости, λ – постоянная Ламэ, L – характерный размер рассматриваемой области, l – характерный размер пор, τ – характерное время физического процесса, ρ_f и ρ_s– безразмерные плотности жидкости и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0, $\mathbf{F}$ – заданный вектор внешних массовых сил и g – ускорение силы тяжести. Описание порового пространства Ω_f^ε, твердого скелета Ω_s^ε можно найти в [1].

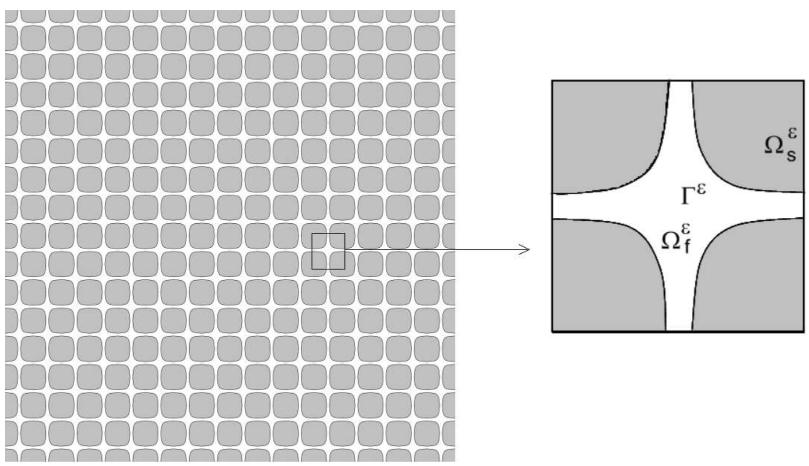

Рис. 1: геометрия порового пространства

В частности,

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

где 1 – периодическая функция $\chi(\mathbf{y})$ есть характеристическая функция множества $Y_f \subset Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$, моделирующего поровое пространство.

В уравнении (2.1) мы учли предположение о характере рассматриваемого физического процесса и пренебрегли инерционным слагаемым, содержащим $\partial^2 \mathbf{w}/\partial t^2$. А именно, для процессов фильтрации характерное время процесса τ является очень большой величиной (месяцы или год), что в точных безразмерных уравнениях движения приводит к малому сомножителю в инерционном слагаемом. Поэтому этим слагаемым можно изначально пренебречь (см. доказательство в [1]). Заметим, что предположение о несжимаемости жидкости автоматически влечет несжимаемость твердого скелета, поскольку скорость звука в твердой среде в несколько раз больше скорости звука в жидкости. А как известно, мерой несжимаемости (сжимаемости) является скорость звука – менее сжимаемая среда обладает большей скоростью звука. В силу этого уравнения неразрывности для жидкой и твердой компонент среды можно записать в виде одного уравнения (2.2), справедливого всюду в области Ω.

Пусть, как и в [1], Ω есть единичный куб:

$$\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1],$$

$S = \partial\Omega$ – граница области Ω, $S_0 = \{x|0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_3 = 1\}$ –верхняя крышка Ω и $S_1 = S \backslash S_0$.

В отличии от [1] мы рассмотрим смешанную краевую задачу, когда на верхней крышке S_0 области Ω отсутствуют нормальные напряжения

$$\mathbb{P} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in S_0, \quad 0 < t < T. \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к границе S_0. На остальной части границы S_1

$$\mathbf{w} = 0, \quad x \in S_1, \quad 0 < t < T. \tag{1.4}$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\varepsilon}_f. \tag{1.5}$$

В данной публикации рассмотрим процессы, для которых

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \mu_1 = \infty, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad 0 < \lambda_0 < \infty, \tag{1.7}$$

$$F^2 = \int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{F}|^2 + |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}|^2 \Big) dxdt < \infty. \tag{1.8}$$

Условие (1.6) означает, что предельный режим описывает односкоростной континуум.

Обсуждение раннее полученных результатов и обзор литературы можно найти в [1]–[4].

2 Основные результаты

Определение 1 *Функции* $(\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ *называются обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5), если они удовлетворяют условиям регулярности*

$$\mathbf{w}^\varepsilon,\ D(x, \mathbf{w}^\varepsilon),\ div\mathbf{w}^\varepsilon,\ p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T),\ \Omega_T = \Omega \times (0, T),$$

граничным условиям (1.5), уравнению (1.2) почти всюду в области Ω_T *и интегральному тождеству*

$$\int_{\Omega_T} \Big(-\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \rho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \varphi +$$

$$\big((1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon\, \mathbb{I}\big) : D(x, \varphi)\Big) dxdt = 0 \tag{2.1}$$

для всех гладких вектор-функций $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ *таких, что* $\varphi|_{S_1} = \varphi|_{t=T} = 0$.

Теорема 1 *При всех $\varepsilon > 0$ у задачи (1.1)– (1.5) существует единственное обобщенное решение $\mathbf{w}^\varepsilon(x,t)$, такое что*

$$\int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 + |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon|^2 + (p^\varepsilon)^2\Big) dxdt \leq C(\varepsilon) F^2. \tag{2.2}$$

Теорема 2 *Функции $\mathbf{w}^\varepsilon$ допускают продолжение $\mathbf{u}^\varepsilon$ из области Ω_s^ε в область Ω такое, что*

$$\int_\Omega |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx, \tag{2.3}$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx, \tag{2.4}$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx, \tag{2.5}$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx \leq M \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx, \tag{2.6}$$

где постоянная M не зависит от малого параметра ε. При этом

$$\int_\Omega |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx \leq M \int_\Omega |\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx, \tag{2.7}$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega |\nabla \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}|^2 dx \leq M \int_\Omega |\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx, \tag{2.8}$$

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon |\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dxdt + \max_{0<t<T} \alpha_\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx \leq M\,F^2, \tag{2.9}$$

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon |\mathbb{D}(x,\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2 dxdt + \max_{0<t<T} \alpha_\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 dx \leq M\,F^2, \tag{2.10}$$

$$\int_{\Omega_T} \Big(|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 + (p^\varepsilon)^2\Big) dxdt \leq M\,F^2. \tag{2.11}$$

Теорема 3 *Существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что последовательность $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\mathbf{u}$. Кроме того последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ соответственно к $\mathbf{u}$ и p, и функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют в области Ω_T системе уравнений*

$$div\, \mathbb{P}_0^s + \hat{\rho}\mathbf{F} = 0, \quad \mathbb{P}_0^s = \lambda_0\, \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x,\mathbf{u}) - p\,\mathbb{I}, \tag{2.12}$$

$$div\,\mathbf{u} = 0, \tag{2.13}$$

где

$$\hat{\rho} = m\,\rho_f + (1-m)\,\rho_s,\ m = \int_Y \chi(\mathbf{y})dy = \langle\chi\rangle_Y\ -\ \textit{пористость},$$

а постоянный симметричный и строго положительно определенный тензор четвертого порядка $\mathbb{A}_0^s$ определяется ниже формулой (5.7). При этом, на верхней крышке S_0 области Ω выполнено условие отсутствия нормальных напряжений

$$\mathbb{P}_0^s \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in S_0, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к границе S_0, а на остальной части границы S_1

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in S_1. \tag{2.15}$$

Замечание 1 *Уравнение (2.12) и краевое условие (2.14) выполняются в смысле теории распределений, как соответствующее интегральное тождество.*

3 Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 базируется на основном энергетическом тождестве

$$\alpha_\mu \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) dx + \frac{\alpha_\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) dx = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx, \tag{3.1}$$

которое формально следует из интегрального тождества (2.1), если в качестве пробной функции рассмотреть функцию $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$. Далее перепишем это тождество в в виде

$$\alpha_\mu \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) dx d\tau + \frac{\alpha_\lambda}{2} \int_{\Omega_s^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx =$$

$$\int_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) dx - \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) dx d\tau. \tag{3.2}$$

Для простоты изложения мы предположили, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Тогда $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0$ и интеграл по гиперплоскости $t = 0$ пропадает.

Далее воспользуемся легко проверяемым неравенством

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \leq T \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)) dx d\tau,$$

неравенствами Гельдера и Коши

$$\int_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) dx \leq \delta \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega |\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 dx,$$

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) dx d\tau \leq \delta \int_0^t \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau + \frac{1}{4\delta} \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau$$

получим

$$\int_\Omega \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \leq C(\varepsilon)\delta \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx + C(\varepsilon, \delta) \int_\Omega |\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 dx +$$

$$C(\varepsilon)\delta \int_0^t \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau + C(\varepsilon, \delta) \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau \tag{3.3}$$

Левую часть последнего неравенства (3.3) оценим вниз используя неравенство Корна

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx \leq M(\Omega) \int_\Omega \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \tag{3.4}$$

и неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx \leq M(\Omega) \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx.$$

Имеем

$$\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2dx \leq C(\varepsilon)\delta\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2dx + C(\varepsilon,\delta)\int_\Omega |\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|^2dx+$$

$$C(\varepsilon)\delta\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau + C(\varepsilon,\delta)\int_0^t\int_\Omega |\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau \tag{3.5}$$

Применяя неравенство Гроноулла к (3.5) получим

$$\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2dx \leq C(\varepsilon)F^2,$$

что в совокупности с (3.3) и (3.4) окончательно дает нам

$$\int_\Omega \Big(|\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},\tau)|^2\Big)dx \leq C(\varepsilon)F^2, \tag{3.6}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \Big(\alpha_\mu\chi^\varepsilon\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + \alpha_\lambda(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\Big)dxdt \leq C(\varepsilon)F^2. \tag{3.7}$$

Давление p^ε оценивается из интегрального тождества (2.1) с помощью оценки (3.7) как линейный непрерывный функционал над пространством $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ функций, равных нулю на границе S_1, что завершает доказательство оценки (2.1). В свою очередь, оценка (2.1) гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1)– (1.5) при фиксированном $\varepsilon > 0$.

4 Доказательство теоремы 2

Достаточно доказать оценки (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11). Остальные оценки доказываются аналогично, если мы продифференцируем уравнения и краевые условия по времени.

Первое утверждение теоремы (оценки (2.3) и (2.5)) есть просто основной результат работы [5]. Вторая половина оценки (2.7) есть неравенство Корна для заданной области Ω, которая не зависит от малого параметра ε. Первая половина оценки (2.7) получается также как и неравенство Пуанкаре – Фридрихса и использует тот факт, что на границе области Ω функция $\mathbf{u}^\varepsilon$ обращается в ноль на периодическом множестве (пересечение замыкания области Ω_s^ε с границей области Ω) строго положительной меры, не зависящей от малого параметра ε.

Вывод оценок (2.9) и (2.11) повторяет вывод оценки (2.2) и также базируется на основном энергетическом тождестве в форме (3.2). Основной здесь является хорошо известная оценка [6]

$$\int_\Omega |\mathbf{v}|^2dx \leq M\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^2dx,$$

справедливой для всякой гладкой функции $\mathbf{v}$, тождественно равной нулю в области Ω_s^ε, с постоянной M не зависящей от малого параметра ε. А именно,

$$\int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon|^2dx \leq \int_\Omega |\mathbf{u}^\varepsilon|^2dx + \int_\Omega |\mathbf{w}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon|^2dx \leq$$

$$M\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^\varepsilon|^2dx + M\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla(\mathbf{w}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon)|^2dx \leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\varepsilon^{2}\int_{\Omega}|\mathbb{D}\big(x,(\mathbf{w}^{\varepsilon}-\mathbf{u}^{\varepsilon})\big)|^{2}dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\varepsilon^{2}\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\varepsilon^{2}\int_{\Omega_{f}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\varepsilon^{2}\int_{\Omega_{s}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx\leq$$

$$M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\frac{\varepsilon^{2}}{\alpha_{\mu}}\alpha_{\mu}\int_{\Omega_{f}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\frac{\varepsilon^{2}}{\alpha_{\lambda}}\alpha_{\lambda}\int_{\Omega_{s}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx=J.$$

Через M здесь и всюду ниже мы обозначаем различные постоянные, не зависящие от малого параметра ε. Поскольку в силу наших предположений

$$\frac{\varepsilon^{2}}{\alpha_{\mu}}+\frac{\varepsilon^{2}}{\alpha_{\lambda}}\leq M,$$

то

$$J\leq M\int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{u}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\alpha_{\mu}\int_{\Omega_{f}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\alpha_{\lambda}\int_{\Omega_{s}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx\leq$$

$$M\alpha_{\mu}\int_{\Omega_{f}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\alpha_{\lambda}\int_{\Omega_{s}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx.$$

В последней цепочке мы воспользовались неравенством (2.5). Таким образом

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}|^{2}dx\leq M\alpha_{\mu}\int_{\Omega_{f}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx+M\alpha_{\lambda}\int_{\Omega_{s}^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^{2}dx,$$

и дальнейшие рассуждения в доказательстве оценки (2.11)для функции $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ повторяют соответствующие рассуждения в доказательстве теоремы 1. Очевидно, что возникающие при этом постоянные не будут зависеть от малого параметра ε. Оценка (2.9) следует из оценки (2.11)для функции $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ и тождества (3.2). Наконец, оценка (2.11) для функции p^{ε} следует из оценки (2.9) и интегрального тождества (2.1) как оценка линейного непрерывного функционала над пространством $L^{2}\big((0,T);W_{2}^{1}(\Omega)\big)$ функций, равных нулю на границе S_{1}.

5 Доказательство теоремы 3

Первое утверждение теоремы есть следствие известных результатов о компактности. Совпадение пределов последовательностей $\{\mathbf{u}^{\varepsilon}\}$ и $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ при ограничении (1.6) доказано в [4]. Вывод уравнения (2.13) есть в [1]. Уравнение (2.12) есть следствие макроскопических уравнений

$$\operatorname{div}_{x}\Big(\lambda_{0}\big((1-m)\mathbb{D}(x,\mathbf{u})+\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_{s}}\big)-p\,\mathbb{I}\Big)+\hat{\rho}\mathbf{F}=0, \tag{5.1}$$

в котором 1 – периодическая по переменной $\mathbf{y}$ функция $\mathbf{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ определяется из системы микроскопических уравнений

$$\operatorname{div}_{y}\Big(\lambda_{0}(1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U})+\mathbb{D}(x,\mathbf{u})\big)-P\,\mathbb{I}\Big)=0, \tag{5.2}$$

$$(1-\chi)(\operatorname{div}_{y}\mathbf{U})=0 \tag{5.3}$$

в единичном кубе Y. В первую очередь нам необходимо решить систему микроскопических уравнений (5.2), (5.3) и определить $\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}$ как оператор от $\mathbb{D}(x,\mathbf{u})$:

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s} = \mathbb{A}^s_1 : \mathbb{D}(x,\mathbf{u}).$$

Для этого воспользуемся структурой функции P:

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = p_f\chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)P_s(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$$

и перепишем уравнение (5.2) в виде

$$\operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\big(\lambda_0\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U})+\mathbb{D}(x,\mathbf{u})\big) - (P_s-p_f)\,\mathbb{I}\big)\Big) = 0. \tag{5.4}$$

Решение системы (5.3), (5.4) ищем в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij}(\mathbf{x},t), \quad P_s - p_f = \sum_{i,j=1}^{3}P^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij}(\mathbf{x},t),$$

где

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$$

есть компоненты тензора $\mathbb{D}(x,\mathbf{u})$. Легко видеть, что функции $\mathbf{U}^{(ij)}$ и $P^{(ij)}$ есть решения периодической краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\big(\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)})+\mathbb{J}^{ij}\big) - P^{(ij)}\mathbb{I}\big)\Big) = 0, \\ (1-\chi)\operatorname{div}_y\mathbf{U}^{(ij)} = 0, \quad \langle\mathbf{U}^{(ij)}\rangle_{Y_s} = 0, \quad \mathbf{y}\in Y. \end{array}\right\}, \tag{5.5}$$

где $\mathbb{J}^{ij}$ есть тензор второго порядка, у которого на пересечении i – той строки и j – того столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Задача (5.5) однозначно разрешима – у нее существует единственное 1 – периодическое решение

$$\mathbf{U}^{(ij)} \in W^1_2(Y_s)$$

и

$$\mathbb{A}^s_1 = \sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}. \tag{5.6}$$

Таким образом

$$\mathbb{A}^s_0 = \sum_{i,j=1}^{3}(1-m)\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \mathbb{A}^s_1. \tag{5.7}$$

Лемма 1 *Тензор $\mathbb{A}^s_0$ является симметричным и строго положительно определенным.*

Доказательство 1 *Для доказательства леммы воспользуемся легко проверяемыми равенствами*

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{kl})\rangle_{Y_s} + \langle\mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}^{kl})\rangle_{Y_s} = 0, \tag{5.8}$$

которые справедливы для всех i, j, k, $l = 1, 2, 3$.

Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ *и* $\eta = (\eta_{ij})$ *– произвольные симметричные матрицы (тензоры) второго порядка и*

$$\mathbf{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}^{(ij)}\zeta_{ij}, \quad \mathbf{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}^{(ij)}\eta_{ij}.$$

Тогда равенства (5.8) влекут равенство

$$\langle \mathbb{D}(y,\mathbf{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y,\mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \zeta : \langle D(y,\mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} = 0. \tag{5.9}$$

Поскольку

$$\big(\mathbb{A}_0^s : \eta\big) : \zeta = (1-m)\eta : \zeta + \eta : \langle D(y,\mathbf{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s},$$

то складывая последнее равенство с (5.9) получим

$$\big(\mathbb{A}_0^s : \eta\big) : \zeta = (1-m)\eta : \zeta + \eta : \langle D(y,\mathbf{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y,\mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} +$$

$$\zeta : \langle D(y,\mathbf{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} = \langle \big(D(y,\mathbf{Y}_\zeta) + \zeta\big) : \big(D(y,\mathbf{Y}_\eta) + \eta\big)\rangle_{Y_s},$$

что доказывает симметричность тензора $\mathbb{A}_0^s$. *Полагая в полученном равенстве* $\eta = \zeta$ *убеждаемся в положительной определенности тензора* $\mathbb{A}_0^s$:

$$\big(\mathbb{A}_0^s : \eta\big) : \eta = \langle \big(D(y,\mathbf{Y}_\eta) + \eta\big) : \big(D(y,\mathbf{Y}_\eta) + \eta\big)\rangle_{Y_s} > 0.$$

Последнее, что нам осталось доказать – выполнение краевого условия (2.11) на части границы S_1. Доказательство этого факта достаточно стандартное и идею доказательства можно найти в [1].

Литература

1. А.М. Мейрманов. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах, Сиб. Мат. Журнал, т. 48, (2007) No. 3, 645– 667.

2. А.М. Мейрманов. Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термо-пороупругости Био, Математический сборник, т. 199 (2008) No. 3, 45– 68.

3. A. Meirmanov. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, Vol. 19 (2008), 259–284.

4. A. Meirmanov. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization, SIAM J. Math. Anal., Vol. 40, (2008) No. 3, 1272– 1289.

5. C. Conca. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, J. math. pures et appl., 64, (1985) 12 – 32.

6. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория вибраций. Мир, Москва (1984).

A DERIVATION OF EQUATIONS FOR FILTRATION OF IMMISCIBLE LIQUID IN IMMISCIBLE ELASTIC SKELETON: THE CASE OF ONE – VELOCITY CONTINUUM

L.F. Maslakova, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: maslakova@bsu.edu.ru,meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. Linear system of differential equation describing a joint motion of a thermoelastic porous body with fluid occupying porous space is considered. Although the problem is linear, it is very difficult to investigate. The main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients under the differentiation operators. The proof is based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures. As the results, we derive anisotropic Lame's system of equations for thermoelastic mixture.

Keywords: Stoke's equations, Lame's equations, Biot equations, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.

УДК 517.55

О РАЗРЕЗАХ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ДИСКРИМИНАНТНОМУ МНОЖЕСТВУ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.Н. Михалкин

Красноярский государственный педагогический университет,
ул. А. Лебедевой, 89, 660049, г. Красноярск, Россия, e-mail: mikhalkin@bk.ru

Аннотация. Рассматривается алгебраическое уравнение с независимыми коэффициентами. Исследуется взаимное расположение дискриминантного множества и двух семейств комплексных гиперплоскостей $\Sigma_{\pm}$, в дополнении к которым главное решение является голоморфной функцией. Фактически $\Sigma_{\pm}$ являются разрезами в пространстве коэффициентов, примыкающими к дискриминантному множеству рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд, интегральное представление, дискриминантное множество.

1 Интегральный и гипергеометрический подходы к решению общего алгебраического уравнения

Общее алгебраическое уравнение имеет вид

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

Его решение (как алгебраическая функция коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$) обладает двойной однородностью и простой заменой сводится [1] к уравнению вида

$$z^n = z^k + y_1 z^{n_1} + ... + y_p z^{n_p},\ n > k \geq 0,\ n_1 > ... > n_p > 0; \tag{1}$$

иными словами, любые два коэффициента мы можем "заморозить полагая их равными $+1$ и -1.

Сначала рассмотрим уравнение (1) при $k = 0, n > n_1$, т. е. уравнение вида

$$z^n + x_1 z^{n_1} + ... + x_p z^{n_p} - 1 = 0,\ n_1 > ... > n_p > 0 \tag{2}$$

(здесь через x_j обозначен коэффициент $-y_j$ уравнения (1)).

В 1921 году Меллин [2] привёл интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для решения уравнения (2) (см.также [3]). Указанная формула была получена им для ветви $z_0(x)$ с условием $z_0(0) = 1$, и названа главным решением уравнения (2). Несложно увидеть, что все остальные ветви получаются из $z_0(x)$ по формуле

$$z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x),\ j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень.

Работа поддержана грантом Президента РФ № МК-2539.2008.1

Теорема 1 (Mellin) *Главное решение уравнения (2) представимо в виде интеграла*

$$z_0(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^p} \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n}z_1 - \cdots - \frac{n_p}{n}z_p\right)\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_p)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n}z_1 + \cdots + \frac{n_p'}{n}z_p + 1\right)} x^z\,dz, \tag{3}$$

где Γ *— гамма функция Эйлера,* γ *— точка из многогранника*

$$\{u \in \mathbb{R}^p_+ :\ n_1u_1 + \cdots + n_pu_p < 1\},$$

$x^z = x_1^{-z_1}\ldots x_p^{-z_p}$, $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p$, *а* $n_k' = n - n_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Теперь рассмотрим уравнение (1), опуская ранее оговоренное предположение $k = 0, n > n_1$. В 1927 году Биркелан ([4], [5]), используя формулу Лагранжа, привёл разложение в гипергеометрический ряд для $n - k$ корней $z_j(x)$, не обращающихся при $y_1 = \ldots = y_p = 0$ в нуль, этого уравнения. Формула Биркелана следующая:

$$z_j(x) = \varepsilon^j \frac{1}{n-k} \sum_{|l|\geq 0} \varepsilon^{jv} \frac{(\tau, r-1)}{l_1!\ldots l_p!} y_1^{l_1}\ldots y_p^{l_p}, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n-k}},\ r = \sum_{\nu=1}^{p} l_\nu,\ v = \sum_{\nu=1}^{p}(n_\nu - n)l_\nu,\ \tau = \frac{1+v}{n-k} + 1,$$

$$(\lambda, l) = \lambda(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+l-1) = \frac{\Gamma(\lambda+l)}{\Gamma(\lambda)},\ (\lambda, 0) = 1,$$

$$|l| = l_1 + \ldots + l_p.$$

(см. [6]).

Далее нас будет интересовать подход Меллина, т.е. мы будем рассматривать уравнение (2). В статье [7], на основе формулы Меллина, была получена интегральная формула для решения (2) с интегрированием по отрезку элементарной функции. А именно, справедлива следующая

Теорема 2 *Ветвь алгебраической функции* $z_0(x)$ *решения уравнения (2) с условием* $z_0(0) = 1$ *допускает представление в виде интеграла*

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\ln\left(1 - \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{n_k}{n}\pi i}x_k t^{\frac{n_k}{n}}(1-t)^{\frac{n_k'}{n}}\right) - \right.$$

$$\left. -e^{-\frac{\pi i}{n}}\ln\left(1 - \sum_{k=1}^{p} e^{-\frac{n_k}{n}\pi i}x_k t^{\frac{n_k}{n}}(1-t)^{\frac{n_k'}{n}}\right)\right]dt, \tag{5}$$

где ветви логарифма определены в области пространства $\mathbb{C}^p$ *переменного* $x = (x_1, \ldots, x_p)$, *полученной удалением из* $\mathbb{C}^p$ *двух семейств комплексных гиперплоскостей*

$$\Sigma_- = \bigcup_{t\in[0;1]}\{\sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}}(1-t)^{\frac{n_k'}{n}} e^{-\frac{n_k}{n}\pi i} = 1\},$$

$$\Sigma_+ = \bigcup_{t\in[0;1]}\{\sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}}(1-t)^{\frac{n_k'}{n}} e^{\frac{n_k}{n}\pi i} = 1\}$$

и выбираются условием $\ln 1 = 0$. *Таким образом,* $z_0(x)$ *голоморфно продолжается из окрестности нуля в область* $\mathbb{C}^p \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$.

Область сходимости интеграла (5) шире области сходимости интеграла Меллина-Барнса (3). Этот факт позволяет описать монодромию решения уравнения (2) в случае, когда оно содержит один параметр.

2 Применение к триномиальному уравнению

Рассмотрим уравнение вида (2) в случае $p = 1$, т. е. когда в уравнении всего один параметр x_1, который мы обозначим через x. Соответствующее уравнение

$$z^n + xz^m - 1 = 0, \quad 0 < m < n \tag{6}$$

назовём триномиальным уравнением. Для него главное решение (5) запишется в виде

$$z_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi in}\int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{(1-t)^{\frac{1+n}{n}}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\ln(1-e^{\frac{m}{n}\pi i}y) - e^{-\frac{\pi i}{n}}\ln(1-e^{-\frac{m}{n}\pi i}y)\right]dt, \tag{7}$$

где $y = xt^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$. Максимальное значение функции $t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$ на отрезке $[0,1]$ равно $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}$, поэтому множества $\Sigma_\mp$ в формулировке Теоремы 2 представляют собой пару лучей

$$\Sigma_\mp = \left\{\tau e^{\pm\frac{m\pi i}{n}} : \ \ \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}\right\}.$$

Отметим, что сектор, ограниченный продолжениями этих лучей до их пересечения (в начале координат), является областью сходимости интеграла Меллина-Барнса (3), представляющего главное решение $z_0(x)$ триномиального уравнения (6) (имеется ввиду сектор, содержащий луч $x > 0$). Действительно, интеграл (3) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}-\frac{m}{n}z\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{n-m}{n}z+1\right)}x^{-z}\,dz,$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{m}$, и согласно [8], его область сходимости вычисляется по формуле

$$|arg\,x| < \frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{n} + 1 - \frac{n-m}{n}\right) = \frac{m}{n}\pi.$$

Далее рассмотрим случай, когда m и n взаимно просты. В этом случае дискриминант уравнения (6) допускает наиболее краткую запись и он равен (см. [1])

$$\Delta = (-1)^n[(-1)^m n^n - m^m(n-m)^{n-m}x^n].$$

Таким образом, дискриминантное множество составляет следующая последовательность точек

$$x_k = \frac{e^{\pi i \frac{m+2k}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} \ , \ k = 0, \ldots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Заметим, что точки x_0 и x_{n-m} дискриминантного множества — есть начала лучей Σ_- и Σ_+, вне которых, по Теореме 2, $z_0(x)$ голоморфна и однозначна. Поэтому, обозначив через σ_k петлю, проходящую через $x = 0$ и окружающую лишь точку x_k, мы приходим к следующему утверждению:

Следствие 1 *Главная ветвь $z_0(x)$ триномиального уравнения (6) переходит в себя при обходе всех петель σ_k, кроме σ_0 и σ_{n-m}.*

Используя рассуждение симметрии и то, что остальные ветви имеют вид $z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x)$,
$j = 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень, получаем

Следствие 2 *Каждая ветвь $z_j(x)$ имеет ветвление лишь в паре точек $x = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}$.*

3 Геометрия разрезов Σ_+ и Σ_- в случае тетраномиального уравнения

Степенные ряды и интегралы Меллина-Барнса (в частности, интеграл (3)) сходятся вплоть до ближайших особых точек функций, которые они представляют. Аналогичным свойством обладает и интеграл (5). Поскольку особым множеством для алгебраической функции $z(x)$ является дискриминантное множество ∇ – множество нулей дискриминанта $\Delta(x)$ уравнения (2), то весьма полезно рассмотреть информацию о взаимном расположении дискриминантного множества и областей сходимости указанных функциональных объектов.

В статье будет описано взаимное расположение дискриминантного множества и комплексных гиперплоскостей $\Sigma_\pm$, которые были определены в Теореме 2. Напомним, что в случае триномиального уравнения семейство гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ представляет собой пару лучей, выходящих из точек дискриминантного множества.

Итак, исследуем взаимное расположение дискриминантного множества с гиперплоскостями $\Sigma_\pm$ в случае тетраномиального уравнения

$$z^n + x_m z^m + x_p z^p - 1 = 0, \ n > m > p > 0. \tag{8}$$

В рассматриваемом случае семейство гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ примет вид

$$\Sigma + = \bigcup_{t \in [0;1]} \{x_m t^{\frac{m}{n}} (1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}} (1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{\frac{p}{n}\pi i} = 1\},$$
$$\Sigma_- = \bigcup_{t \in [0;1]} \{x_m t^{\frac{m}{n}} (1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{-\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}} (1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{-\frac{p}{n}\pi i} = 1\}.$$

Обозначим гиперплоскости семейства $\Sigma_\pm$ через $\Sigma_\pm(t)$, и пусть $F_\pm(x;t)$ – линейные функции переменного $x=(x_p,x_m)$, определяющие $\Sigma_\pm(t)$:

$$F_\pm(x;t) = x_m t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{\pm\frac{m}{n}\pi i} + x_p t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-p}{n}} e^{\pm\frac{p}{n}\pi i} - 1.$$

Согласно [1], дискриминантное множество

$$\nabla = \{x\in\mathbb{C}^2 : \Delta(x_p,x_m)=0\}$$

уравнения (8) допускает параметризацию

$$\begin{aligned} x_p &= \tfrac{ns}{(n-p)s+(n-m)}\left(-\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}},\\ x_m &= \tfrac{n}{(n-p)s+(n-m)}\left(-\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}},\ s\in\mathbb{CP}_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через K – множество критических точек логарифмической проекции

$$\nabla\to\mathbb{R}^2 : (x_p,x_m)\to(\log|x_p|,\log|x_m|)$$

дискриминантной гиперповерхности ∇.

Теорема 3 *Комплексные гиперплоскости семейства $\Sigma_\pm$ касаются дискриминантного множества ∇ вдоль подмножества*

$$K_\pm = \left\{x^\pm(s) : s\in\mathbb{RP}_1,\ \frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}>0\right\}\subset K,$$

где $x^\pm(s)$ – ветви параметризации (9), определяемые условиями

$$\arg\left(-\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{1}{n}} = \mp\frac{\pi}{n}.$$

В точке $x^\pm(s)$ с ∇ касается гиперплоскость семейства $\Sigma_\pm$, соответствующая параметру $t=\frac{ps+m}{n(s+1)}$.

Доказательство 1 *Точки касания ∇ и $\Sigma_\pm(t)$ определяются системой*

$$F_\pm(x(s),t)=0, \frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s}=0. \tag{10}$$

Пусть $s\in\mathbb{RP}_1$, причем $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}>0$. Тогда параметризация (9) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p(s) &= x_p^{(l)}(s) = e^{\frac{\pi pi}{n}(1+2l)}\tfrac{ns}{(n-p)s+(n-m)}\left(\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}},\\ x_m(s) &= x_m^{(l)}(s) = e^{\frac{\pi mi}{n}(1+2l)}\tfrac{n}{(n-p)s+(n-m)}\left(\tfrac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}},\ l=-1,\dots,n-2. \end{aligned}$$

Найдем производные $\frac{\partial x_p}{\partial s}$ и $\frac{\partial x_m}{\partial s}$. Как показывают вычисления

$$\frac{\partial x_p}{\partial s} = e^{\frac{\pi pi}{n}(1+2l)} n\left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}}\frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)},$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial s} = -e^{\frac{\pi m i}{n}(1+2l)} n \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)},$$

тогда

$$\frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s} = t^{\frac{p}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}} n \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{p}{n}} \frac{p(n-p)s+m(n-m)}{((n-p)s+(n-m))^2(ps+m)} \times$$

$$\times \left[e^{\frac{\pi p i}{n}(1+2l\pm 1)}(1-t)^{\frac{m-p}{n}} - \left(\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m}\right)^{\frac{m-p}{n}} t^{\frac{m-p}{n}} e^{\frac{\pi m i}{n}(1+2l\pm 1)} \right].$$

Приравняем полученное произведение к нулю. Несложно заметить, что для выполнения второго уравнения системы (10), l следует выбирать равным -1 для удовлетворения условию $\frac{\partial F_+(x(s),t)}{\partial s} = 0$ и $l = 0$ для выполнения условия $\frac{\partial F_-(x(s),t)}{\partial s} = 0$. Очевидно, что $x^{(-1)}(s) = x^+(s)$, $x^{(0)}(s) = x^-(s)$. При указанном выборе ветви мы приходим к уравнению

$$\frac{1-t}{t} = \frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} \tag{11}$$

(которое получается приравниванием к нулю выражения, стоящего в квадратной скобке), откуда находим $t(s) = \frac{ps+m}{n(s+1)}$. Отметим, что так как функция $\frac{1-t}{t}$ при $0 < t < 1$ строго монотонна, то уравнение (11) не имеет других корней, кроме найденного.

Итак, при условии $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} > 0$ и при указанном выборе ветвей, для $t = \frac{ps+m}{n(s+1)}$ выполняется второе равенство системы (10). С помощью достаточно простых вычислений несложно показать, что при $t(s) = \frac{ps+m}{n(s+1)}$ выполняются условия $F_+(x^{(-1)}) = 0$ и $F_-(x^{(0)}) = 0$, т.е. справедливо и первое равенство системы (10).

Замечание. Достаточно простые вычисления показывают, что при $\frac{(n-p)s+(n-m)}{ps+m} < 0$ не может выполняться равенство $\frac{\partial F_\pm(x(s),t)}{\partial s} = 0$ системы (10). Т.е. при этих значениях s касания комплексных гиперплоскостей $\Sigma_\pm$ и дискриминантного множества ∇ не происходит.

Далее рассмотрим кубическое уравнение

$$z^3 + x_2 z^2 + x_1 z - 1 = 0 \tag{12}$$

(т.е. уравнение (8) при $n = 3,\ m = 2,\ p = 1$). В этом случае подмножество $K_\pm$ множества K критических точек логарифмической проекции $\nabla \to \mathbb{R}^2$ определяется следующим условием:

$$K_\pm = \left\{ x^\pm(s) : s \in \mathbb{RP}_1,\ \frac{2s+1}{s+2} > 0 \right\}.$$

Покажем, что множество $K_\pm$ является огибающей к семейству гиперплоскостей $\Sigma_\pm$. Для этого, согласно [9], нужно показать, что при рассматриваемых s и $t = t(s)$, во-первых, выполняется, система равенств

$$F_\pm(x^\pm(s); t(s)) \equiv 0\,,\ \frac{\partial F_\pm(x^\pm(s); t(s))}{\partial t} \equiv 0, \tag{13}$$

во-вторых, справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} \neq 0. \tag{14}$$

Справедливость первого тождества системы равенств (13) была показана при доказательстве Теоремы 3. Проверим второе тождество из (13):

$$\frac{\partial F_{\pm}(x;t)}{\partial t} = \frac{1}{3}x_1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} - \frac{2}{3}x_1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} +$$

$$+\frac{2}{3}x_2\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} - \frac{1}{3}x_2\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}.$$

Тогда для точек множества $K_{\pm}$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\frac{\partial F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t} = \frac{s}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2s}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{s+2}{2s+1}\right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$\frac{2}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{s+2}\left(\frac{2s+1}{s+2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{s+2}{2s+1}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2s+1}{s+2}\left(\frac{2}{s+2} - 1 + \frac{s}{s+2}\right) = 0.$$

Перейдем к доказательству неравенства (14). Как показывают вычисления

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x;t)}{\partial t^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{t^2(t-1)}\left(x_1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\pm\frac{\pi i}{3}} + x_2\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

Вычисления показывают, что применительно ко множеству $K_{\pm}$ получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} = -\frac{18(s+1)^4}{(s+2)^2(2s+1)^2}.$$

Итак, $\frac{\partial^2 F_{\pm}(x;t)}{\partial t^2} \neq 0$ для всех s – удовлетворяющих условию $\frac{2s+1}{s+2} > 0$. Таким образом, доказано

Предложение 1 *В случае кубического уравнения (12) множество $K_{\pm}$ является огибающей к семейству гиперплоскостей $\Sigma_{\pm}$.*

Литература

1. M. Passare, A. Tsikh, Algebraic equations and hypergeometric series / M. Passare, A. Tsikh // In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer. 2004. P. 653–672.

2. H.J. Mellin, Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V.172, P. 658–661.

3. А.Ю. Семушева, А.К. Цих, Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений. В кн.: Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской), Красноярск: КрасГУ. 2000. С. 134–146.

4. R. Birkeland, Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques // Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo. 1927. №8. P. 1–23.

5. R. Birkeland, Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen // Math. Ztschr. 1927. №26. P. 566–578.

6. Н.Г. Чеботарёв, Теория Галуа, М.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936. 156 с.

7. Е.Н. Михалкин, О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. матем. журн. 2006. Т.47, №2. С. 365–371.

8. О.Н. Жданов, А.К. Цих, Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т.39, №2. С. 282–298.

9. В.А. Залгаллер, Теория огибающих, М.: Наука. 1975. 100 с.

ON THE SLITS WHICH TOUCH THE DISCRIMINANT SET OF ALGEBRAIC EQUATION

E.N. Mikhalkin

Krasnoyarsk State Pedagogical University,
A. Lebedevoj str., 89, Krasnoyarsk, 660049, Russia, e-mail: mikhalkin@bk.ru

Abstract. The paper deals with a general algebraic equation. We study as two families of complex hyperplanes $\Sigma_\pm$ arrangements to the discriminant set of this equation. The principal solution to equation is a holomorphic function in the complement to $\Sigma_\pm$. In fact, these two families of hyperplanes are a slits in the space of coefficients which touch the discriminant set of this equation.

Keywords: algebraic equation, hypergeometric series, integral representation, discriminant set.

УДК 517.928.2

ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ И ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

А.Б. Расулов

Московский энергетический институт,

ул. Красноказарменная , 14, 111250, г. Москва, Россия, e-mail: rasulov- abdu@rambler.ru

Аннотация. В статье для эллиптических систем второго и третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой найдено интегральное представление решения и соответствующие формулы обращения. Полученные интегральные представления могут быть применены в исследовании асимптотического поведения решений при $r = |z| \to 0$, а также в исследовании граничных задач.

Ключевые слова: эллиптическая система, интегральные представления, сверхсингулярная точка, краевые задачи.

Введение

В области $D = D_0 \backslash \{0\}$ рассматриваются эллиптические системы второго и третьего порядка с сверхсингулярной точкой z=0 вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{b(z)}{r^{2n}}U + \frac{c(z)}{r^{2n}}\overline{U} = \frac{f(z)}{r^{2n}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \overline{z}^3} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2} + \frac{b(z)}{r^{2n}}\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{c(z)}{r^{3n}}U + \frac{d(z)}{r^{3n}}\overline{U} = \frac{f(z)}{r^{3n}}, \tag{2}$$

где $U(z) = U_1(x,y) + iU_2(x,y)$,

$a(z) = a_1(x,y) + ia_2(x,y) = e^{i\theta}a_0(z)$, $b(z) = b_1(x,y) + ib_2(x,y) = e^{i2\theta}b_0(z)$, $c(z) = c_1(x,y) + ic_2(x,y) = e^{i3\theta}c_0(z)$, $d(z) = d_1(x,y) + id_2(x,y)$, $f(z) = f(x,y) + if_2(x,y)$.

Система (1),(2) при $n < 1$ называется системой со слабой особенностью,при $n = 1$ системой с сингулярной точкой, а при $n > 1$ системой с сверхсингулярной точкой Система уравнений (1) в случае регулярных коэффициентов, т.е. вслучае $n = 0$,была исследована А.В.Бицадзе[1]. А.П.Солдатовым рассмотрены более общие системы с регулярными коэффициентами [2] . Заметим, что исследование системы уравнений (1) в случае ее вырождения $(n = 1)$,было предложено еще в 80-х годах А.В.Бицадзе, но из-за ряда трудностей этот вопрос до настоящего времени оставался открытым. Вопросы исследования бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизной с изолированной точкой уплощения приводят нас к исследованию системы первого порядка с сингулярной точкой:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{a(z)}{r}U + \frac{b(z)}{r}\overline{U} = \frac{f(z)}{r} \tag{3}$$

Исследованию этой системы посвящено очень много работ, среди которых весомое значение имеют монографии Л.Г. Михайлова и Усманова З.Д. [3,4]. Последние результаты по исследованию системы(3) опубликованы в работах [5,6]. Актуальность выяснения корректной постановки задач для системы уравнений (2) впервые указана А.В.Бицадзе. Отметим , что даже в случае регулярных коэффициентов не имеется ни одной работы, посвященной исследованию этой системы. Поэтому система (2) нами исследована в регулярном(n=0),сингулярном (n=1) и сверхсингулярном (n>1) случаях. В ряде случаев для систем (1) и(2) удается найти явные решения, которые позволяют легко изучить свойства решений в рассматриваемой области,а также легко применить их к решению краевых задач. Во всех случаях явно выделяется особая часть решений, позволяющая детально изучить поведение решений в окрестности сингулярной точки.

1 Задачи типа Дирихле и Римана-Гильберта для эллиптической системы второго порядка с сверхсингулярной точкой

Задача типа Дирихле.

Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup\{0\})$ при следующих граничных условиях:

$$\operatorname{Re}\left[\exp(-\omega_a(z)+W_a(z)(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\varphi(z)U)\right]_\Gamma=g_1(t),\operatorname{Re}\left[\exp(-W_\varphi(z)U\right]_\Gamma=g_2(t);\qquad(D_1)$$

$$g_k(t)\in C(\Gamma);t\in\Gamma.$$

Задача типа Римана-Гильберта.

Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2_{\overline{z}}(D)$ такое, что

$$\exp\left[-W_\phi(z)U\right],\exp\left[-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)\right](\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n})U(z))\in C^{0,\alpha}(\overline{D})$$

и удовлетворяющее на границе L условиям

$$\operatorname{Re}\left[(a_1(t)-ib_1(t))\exp(-\omega_{\lambda_2}(t)+W_{\lambda_2}(t))(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U(z))\right]_L=g_1(t),$$

$$\operatorname{Re}\left[a_1(t)-ib_1(t))\exp(+W_\phi(t)U(t)\right]_L=g_2(t),\qquad(G_1)$$

где $a_k(t)-ib_k(t),g_k(t),k=1,2$ заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем , причем $a_k(t)-ib_k(t),k=1,2;t\in L$.

Теорема 1 *Пусть в системе (1) $n>1$, функции $a(z),b(z),\in C_{\overline{z}}(D_0),c(z)=0$, корни характеристического уравнения являются различными и функции $a(z)$ и $b(z)$ между собой связаны при помощи формулы $b(z)=-r^n\varphi(z)(a(z)+r^n\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ известная аналитическая функция. Кроме того, пусть*

$$\operatorname{Re}\omega_a(z)<0;$$
$$\exp\left[-\omega_a(z)\right](x^2+y^2)^{-n}f(z)\in Lp(\overline{D_0}),p>2$$
$$|a_0(z)-a_0(0)|\le nr^\gamma,\gamma>n-1.$$

Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C^2_{\overline{Z}}(D)$ представимо в виде

$$U(z)=\exp\left[-W_\varphi(z)\right]\left\{\Psi(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[W_\varphi(\varsigma)-W_a(\varsigma)+\omega_a(\varsigma)\right]}{\varsigma-z}\times\right.$$

$$\times\left[\Phi(\varsigma)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^n(t-\varsigma)}\right]d\varsigma\Bigg\}\quad(4)$$

где $W_a=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{e^{i\varphi}(a_0(\varsigma)-a_0(0))}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{n}{2}}(\varsigma-z)}d\varsigma, W_\varphi(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\varphi(\varsigma)d\varphi}{(\varsigma-z)}, \omega_a(z)=\frac{2a_0(0)}{(1-n)r^{n-1}}$, $k=\overline{1,2}; \Phi(z)$ *и* $\Psi(z)-$*произвольные аналитические функции комплексного переменного* z.

Теорема 2 *Пусть в системе (1)* $n>1, a(z), b(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1,кроме* $\operatorname{Re}\omega_a(z)<0$ *и пусть* $\operatorname{Re}\omega_a(z)>0$ *и* $\forall z\in D$ *произвольная аналитическая функция* $\Phi(z)\equiv 0$. *Тогда любое решение уравнения (1) из класса* $C^2_{\overline{z}}(\overline{D})$ *представимо в виде*

$$U(z)=\exp\left[-W_\varphi(z)\right]\left\{\Psi(z)-\left[-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^n(t-\varsigma)}\right]d\varsigma\right\},\qquad(5)$$

где $\Psi(z)-$ *произвольные аналитические функции комплексного переменного* z.

Теорема 3 *Пусть в системе (1), удовлетворяют условиям теоремы 1 и* $\operatorname{Re}\omega_a(z)=0$. *Кроме того, пусть функция* $f(z)\in C(\overline{D})$ *и при* $r\to 0$ *ее поведение определяется из асимптотической формулы* $(f(z)=0(r^{\gamma_1}), \gamma_1>n$.

Лемма *Поведения решений (4) в окрестности начала координат определяется формулой*

$$W(z)=\alpha_0 e^{\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}}+\frac{2\beta_0}{1-n}E_{\frac{n}{n-1}}(a(0))e^{-i\theta}+e^{-i\theta}\omega_0(z),$$

где $E_{\frac{n}{n-1}}(a(0))=\int\limits_{R^{1+n}}^{\infty}e^{\frac{2a_0(0)}{1-n}\eta}\eta^{\frac{n}{n-1}}B_0(\eta)d\eta,-$ *обобщенная интегрально-показательная функция,* α_0,β_0- *постоянные,* ω_0-*ограниченная функция при* $r\to 0$.

Используя лемму доказано следующая теорема о единственности интегрального представления (4) в классе непрерывных функций.

Теорема 4 *Пусть выполнены условий теоремы 1.Тогда однородное система (1) в классы* $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup 0)$ *имеет только тривиальное решение.*

Теорема 5 *Пусть коэффициенты уравнения (1) и его правая часть удовлетворяют условиям теоремы 1 , тогда интегральное представление (4) обратимо. Соответствующие аналитические функции* $\Phi(z)$*и*$\Psi(z)$ *единственным образом внутри области* D *находятся через значение* $U(z)$ *и* $\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}$ *при помощи формул :*

$$\Phi(z)=\left[\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\varphi(z)U\right]\exp\left[W_a(z)-\omega_a(z)\right]+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\exp\left[-\omega_a(\zeta)+W_a(\zeta)\right]f(\zeta)}{(\zeta-z)(\xi^2+\eta^2)^n}d\zeta,\qquad(6)$$

$$\Psi(z)=U(z)\exp\left[W_\varphi(z)\right]+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\exp\left[W_\varphi(\zeta)-W_a(\zeta)+\omega_a(\zeta)\right]}{(\zeta-z)(\zeta^2+\eta^2)^n}\times$$

$$\times\left[\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi^2+\eta^2)^n(t-\zeta)}\right]d\zeta.\qquad(7)$$

Теорема 6 *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача* (D) *разрешима единственным образом и ее решение дается при помощи формулы (4), в которой аналитические функции* $\Phi(z)$ *и* $\Psi(z)$ *соответственно определяются формулами:*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \tilde{g}_1(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta};$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \tilde{g}_2(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}; |z| < 1,$$

где $\widetilde{g_k}(t), k = 1, 2-$ *известные функции.*

Решение задачи типа Римана-Гильберта $(G1)$: Используя интегральные представления (4) и условия задачи $(G1)$, а также формулы обращения (6) и (7)получим

$$\operatorname{Re}\left[(a_1(t) - ib_1(t))(z)\right]_L = \operatorname{Re}\left[(a_1(t) - ib_1(t)) \exp(-\omega_{\lambda_2}(t) + W_{\lambda_2}(t)) \frac{\partial U}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_1(z)}{r^n} U)_L\right] +$$

$$+ \operatorname{Re}\left[(a_1(t) - ib_1(t)) \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp[-\omega_{\lambda_2}(\zeta) + W_{\lambda_2}(\zeta))] f(\zeta)}{(\zeta^2 + \eta^2)(\zeta - t)} d\zeta\right] = g_1(t) +$$

$$+ (a_1(t) - ib_1(t)) T_D(-\omega_{\lambda_2}, W_{\lambda_2}, f)(t) = \tilde{g}_1(t);$$

Отсюда

$$Re\left[(a_1(t) - ib_1(t))\Phi(z)\right] = \tilde{g}_1(t), \tilde{g}_1(t) \in H_\alpha(L). \qquad (G_1^1)$$

Используя второе условие задачи (G_1^1), а также решение задачи и формулу обращения (7), получаем

$$\operatorname{Re}\left[(a_2(t) - ib_2(t))\Psi(z)\right] = g_2(t) + \operatorname{Re}\left\{(a_2(t) - ib_2(t)) \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp[W_\phi(\zeta) - W_{\lambda_2}(\zeta) + \omega_{\lambda_2}(\zeta)]}{(\zeta - t)} \times\right.$$

$$\left. \times \left[\Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp[-\omega_{\lambda_2}(t) + W_{\lambda_2}(t)] f(t) dt}{(\xi^2 + \eta^2)(\zeta - t)}\right]_L d\zeta\right\} = \tilde{g}_2(t), (G_1^2)$$

$$\operatorname{Re}\left[(a_2(t) - ib_2(t))\Psi(z)\right] = \tilde{g}_2(t), \qquad (G_1^2)$$

где $\tilde{g}_1(t) \in H_\alpha(L)$. Пусть $\kappa_k = Ind\left[a_k(t) - ib_k(t)\right], k = \overline{1, 2}$.

Теорема 7 *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и* $\kappa_k = Ind\left[a_k(t) - ib_k(t)\right], k = \overline{1, 2}, \kappa_k > 0$ *где* $\kappa_1 > 0$ *является индексом задачи* (G_1^1), *а* $\kappa_2 > 0$ *индексом задачи* G_1^2. *Если* $\kappa_k \geq 0$, *то задача* (G_{11}^k) *разрешима и ее решение содержит* $\kappa_1 + \kappa_2 + 2 > 0$ *произвольных постоянных. Если* $\kappa_1 > 0 (\kappa_2 < -2)((\kappa_2 < -2)(\kappa_2 > 0))$, *то для разрешимости задачи* $(G_1 1)$ *необходимо и достаточно выполнение* $|\kappa_k > 0| - 2 \quad (\ |\kappa_1| - 2))$ *условий разрешимости.* **Замечание.** Аналогичным образом иссследованы следующие задачи типа Дирихле

и Римана- Гильберта.

Задачи типа Дирихле. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup 0)$ при следующих граничных условиях:

$$\operatorname{Im}\left[\exp(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)).(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_1(t),$$

$$\operatorname{Im}\left[\exp(-W_\phi(z)U\right]_L=g_2(t), \tag{D_2}$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)).(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_1(t),$$

$$\operatorname{Im}\left[\exp(-W_\varphi(z)U\right]_L=g_2(t), \tag{D_3}$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(+W_\varphi(z))\,U(z)\right]_L=g_1(t)$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z))U(z)\right]_L=g_1(t), \tag{D_4}$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_2(t).$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z))U(z)\right]_L=g_1(t),$$

$$\operatorname{Re}\left[\exp(\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_2(t). \tag{D_5}$$

2 Задачи типа Дирихле для эллиптической системы третьего порядка с сверхсингулярной точкой.

Задачи типа Дирихле. Требуется найти решение системы уравнений (2) из класса $C^3_{\overline{z}}(D)$ при следующих граничных условиях

$$\operatorname{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_3}(z)+W_{\lambda_3}(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U\right)\right]_L=g_1(t),$$

$$\operatorname{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)U\right]_L=g_2(t),$$

$$\operatorname{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z)\right)U\right]_L=g_3(t); \tag*{$D_6)$}$$

где $g_k(t),\;\; k=\overline{1,3}$ непрерывные функции точек контура Нетрудно видеть, что задача (2) эквивалентна следующей задаче:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_3(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_2(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)U=\frac{f(z)-\left[A(z)\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}+B(z)U(z)\right]}{r^{3n}}, \tag{8}$$

где $A(z)=r^{2n-1}A_1(z), B(z)=r^{n-1}B_1(z)$, причем

$$A_1(z)=\left[-ne^{i\theta}2^{-1}(2\lambda_1(z)+\lambda_2(z)+r(2\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial\lambda_2(z)}{\partial\overline{z}}\right],$$

$$B_1(z)=\left[|z|^{n+1}\frac{\partial^2\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}^2}-|z|^n ne^{i\theta}\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}+|z|^{n-1}2^{-2}n(n+2)e^{i2\theta}\lambda_1(z)\right]+$$

$$+|z|\left[\lambda_1(z)\frac{\partial\lambda_2(z)}{\partial\overline{z}}+(\lambda_2(z)+\lambda_3(z))\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}\right]+e^{i\theta}\lambda_1(z)(\lambda_2(z)-2^{-1}\lambda_3(z)).$$

$(B_1(z)=0)$.

Введем следующие обозначения:

$$W_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{i\theta}\left[(\lambda^0{}_1(\varsigma)-\lambda_2(\varsigma))-(\lambda_1(0)-\lambda_2(0))\right]}{(\varsigma-z)|\varsigma|^n}d\varsigma,$$

$$W_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{i\theta}\left[(\lambda^0{}_1(\varsigma)-\lambda_2(\varsigma))-(\lambda_1(0)-\lambda_2(0))\right]}{(\varsigma-z)|\varsigma|^n}d\varsigma,$$

$$F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[\omega_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)\right]}{\varsigma-z}d\varsigma.$$

Будем предполагать, что в окрестности начала $z=0$ координат выполняются условия:

$$\left|\lambda_j^0(z)-\lambda_j^0(0)\right|\leq H_j|z|^{\gamma_j},\gamma_j>n-1,1\leq j\leq 3; \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\left[(\lambda^0{}_1(z)-\lambda^0{}_2(0))\right]>0; \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}\left[(\lambda_3^0(0)-\lambda_2^0(0)\right]>0; \tag{11}$$

$$\exp\left[(-\omega_3(z)\right]r^{-3n}f(z)\in Lp(D),p>2 \tag{12}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8 *Пусть в уравнении (2) коэффициенты $a_0(z).b_0(z),c_0(z)\in C^2(D_0)$ и ограничены в $\overline{D},n>1,d(z)=0$, а корни характеристического уравнения $\lambda_1(z),\lambda_2(z),\lambda_3(z)$ различны и удовлетворяют условиям (9),причем $\lambda_j(z),1\leq j\leq 3$ таковы, что имеют место равенства $A_1(z)=0,\ B_1(z)=0\forall z\in\overline{D})$. Пусть, кроме того, выполнены условия (9)-(12). Тогда любое решение уравнения (2) из класса $C^3(D)$ представимо в виде*

$$U(z)=\exp\left[\omega_{\lambda_1}(z)-W_{\lambda_1}(z)\right]\left\{\Phi_3(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\exp\left[\omega_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)\right]\frac{\Phi_2(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\exp\left[\omega_{\lambda_3}(\varsigma)-\omega_{\lambda_2}(\varsigma)+W_{\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_3}(\varsigma)\right]\frac{F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)}{\varsigma-z}\Phi_1(\varsigma)d\varsigma-$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[W_{\lambda_3}(t)-\omega_{\lambda_3}(t)\right]}{(t-z)|t|^{3n}}\left[F_{\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3}(t)\right]f(t)dt\right\}, \tag{13}$$

где обозначено:

$$F_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)}{(\varsigma-z)}\exp\left[\omega_{\lambda_3}(\varsigma)-\omega_{\lambda_2}(\varsigma)+W_{\lambda_2}(z)\right]d\varsigma,$$

а $\Phi_j(z)(j=1,2,3)-$ произвольные аналитические функции комплексного переменного z.

Теорема 9 *Пусть в системе (2) $n > 1$ и коэффициенты уравнения $a(z), b(z), c(z), d(z)$ и его правая часть $f(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 9. Тогда интегральное представление (13) обратимо. Соответствующие аналитические функции $\Phi_j(z), j = \overline{1,3}$ находятся однозначно в области через значения $U(z), \frac{\partial U}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2}$ при помощи формул*

$$\Phi_3(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda_3}(z) + W_{\lambda_3}(z)\right] \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_2(z)}{r^n}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right) U +$$

$$+\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp\left[-\omega_{\lambda_3}(t_1) + W_{\lambda_3}(t_1)\right] f(t_1) dt_1}{(t_1 - z)|t_1|^{2n}}. \tag{14}$$

$$\Phi_2(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda 2}(z) + W_{\lambda_2}(z)\right] \left[\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_2(z)}{r^n} U\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp\left[W_{\lambda 2}(\zeta) - \omega_{\lambda_2}(\zeta)\right]}{(\zeta - z)} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\varsigma}} - \frac{\lambda_2}{\rho^n}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\varsigma}} - \frac{\lambda_1}{\rho^n}\right) U d\zeta. \qquad 15)$$

$$\Phi_1(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda_1}(z) + W_{\lambda_1}(z)\right] U(z, \overline{z}) +$$

$$+\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\exp\left[-\omega_{\lambda_1}(\zeta) + W_{\lambda_1}(\zeta)\right]}{\zeta - z} \left(\frac{\partial U}{\partial \overline{\zeta}} - \frac{\lambda_1}{\rho^n} U\right) d\zeta. \tag{16}$$

Теорема 10 *Пусть выполнены все условия теоремы 8 и условия задачи . Тогда задача (D_6) всегда разрешима и ее решение содержит три произвольные постоянные, которое даются формулой (13).*

Литература

1. А. В. Бицадзе. Некоторые классы уравнений в частных производных. М "Наука 1981; -448 с.

2. А.П. Солдатов. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости. Изв. РАН т.70,№6,2006.с.161-192.

3. Л.Г. Михайлов. Новый класс особых интегральных уравнений и его приминение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе. Изд. АН Тадж. ССР,1963.

4. З.Д. Усманов. Обобщенные системы Коши-Римана с сНгулярной точкой. Душанбе.Изд. АН Тадж. ССР,1993.

5. З.Д. Усманов. Связь многообразий решений обобщенных систем Коши- Римана. Математические заметки.1999г.№5.с301-307.

6. З.Д. Усманов, А.Л. Гончаров, С.Б. Климентов. Аналог теоремы Лиувилля для одного класса систем типа Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Владикавказский математический журнал,2005,вып.4.с.4-16.

THE DIRICHLET AND HILBERT TYPE PROBLEMS FOR SECOND AND THIRD ORDER LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS WITH INTERIOR SUPERSINGULAR POINT

A.B. Rasulov

Moscow Energy Institute,
Krasnokazarmennaya str., 14, Moscow, 111250, Russia, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. This paper is devoted to the integral representations and its inversions formulas for second and third order linear elliptic systems with interior supersingular point. The obtained integral representations can be applied to examination of an asymptotical solution behavior for $r = |z| \to 0$ and solution boundary value problems.

Keywords: elliptic systems, integral representations, supersingular point, boundary value problems.

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УНИТАРНОМ ОБОБЩЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОНИНА—ПУАССОНА

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
Пр. Патриотов, 53, г. Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. Для известных операторов преобразования Сонина и Пуассона рассматривается один класс их обобщений—операторы Бушмана–Эрдейи. Для этих операторов изучаются формулы композиции, устанавливающие их связь с операторами дробного интегродифференцирования. В пространстве L_2 рассматриваются вопросы ограниченности, обратимости, унитарности. Решена задача о построении обобщений операторов преобразования Сонина и Пуассона, которые являются унитарными при всех значениях параметра.

Ключевые слова: операторы преобразования Сонина и Пуассона, унитарность, ограниченность, дробное интегродифференцирование, операторы Бушмана–Эрдейи.

1 Введение

Определение 1 *Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение*

$$T\,A = B\,T. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что ОП T *сплетает* операторы A и B (intertwining operator). Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T. Иногда в определение ОП закладывают и требования его обратимости и/или непрерывности, которые являются желательными, но не обязательными свойствами. В конкретных реализациях операторы A и B чаще всего (но не всегда) являются дифференциальными, T — линейный оператор на стандартных пространствах. Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам, так как преобразуемые операторы A и B как правило являются неограниченными в рассматриваемом пространстве. Типичный пример: определённые первоначально на финитных функциях дифференциальные операторы A, B и интегральный ОП, продолжаемый затем по непрерывности на всё пространство $L_2(0, \infty)$. Так что, например, спектры операторов, сплетаемых ОП, могут не совпадать. Кроме дифференциальных, преобразуемые операторы A и B могут также быть интегральными, интегро–дифференциальными, или дифференциально–разностными, все эти случаи встречаются в теории.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B, из которого A получается некоторым возмущением. Тогда, если существует ОП (1), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A, то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu, g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из основных применений техники ОП в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены существенные части монографий [1]-[16]. К сожалению, на русском языке нет книг, полностью посвящённых ОП, таких, как замечательные книги Роберта Кэррола на английском [1]-[3].

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин 'transmutation', восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин 'transformation' при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина и другими подобными им. Кроме того, термин 'transmutation' имеет в романских языках дополнительный оттенок 'волшебного превращения', что довольно точно характеризует действие ОП. Приведём точную цитату из [3]: "Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation".

Необходимость теории ОП доказана большим числом её приложений. Методы ОП применяются в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Гельфанда–Левитана, полученного Б.М. Левитаном; в теории рассеяния через ОП выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер ОП отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса позволяет использовать ОП для доказательства существования решений и построения солитонов. Определёнными разновидностями ОП являются части теорий обобщённых аналитических функций и операторов обобщённого сдвига. В теории уравнений с частными производными методы ОП применяются для построения явных решений некоторых задач, изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с особенностями на части границы, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория ОП позволяет дать некоторую новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения ОП к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли–Винера. Методы ОП с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста и квантовой теории рассеяния, исследовании системы Дирака, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Рассматривались ранее и изучаются в настоящее время задачи, в которых сплетаются интегральные операторы (например, возмущённый и невозмущённый операторы Вольтерра), интегро–дифференциальные операторы (например, вторая производная плюс дробный интеграл и вторая производная) или дифференциально–разностные операторы (например, оператор Дункля).

В математической физике с ОП тесно связаны понятия волновых операторов для уравнения Шрёдингера и метод вторичного квантования.

О вкладе отечественных математиков в данную теорию не скажешь лучше ведущего американского специалиста по ОП Роберта Кэррола: "Идея ОП, возникшая в начале 50–х, восходит к Гельфанду, Левитану, Марченко, Наймарку и другим. Она была подхвачена вновь Дельсартом и Лионсом..."[17]. На самом деле, некоторые указания на возможность построения ОП встречались и ранее, например, в работах Курта Фридрихса в начале 20–го века.

Мы будем считать, что все интегральные и дифференциальные операторы, рассматриваемые далее в этой статье, первоначально определены на финитных на $L_2(0,\infty)$ функциях (бесконечно дифференцируемых с компактным на данной полуоси носителем), и далее в случае ограниченности соответствующих операторов продолжаются по непрерывности на всё пространство $L_2(0,\infty)$. С учётом этого соглашения мы будем называть дифференциальными операторами объекты, которые более точно следовало бы называть дифференциальными выражениями.

2 Операторы преобразования Сонина и Пуассона

Перейдём к рассмотрению, наверное, самого известного класса ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T(B_\nu)f = (D^2)Tf, B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \nu \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Как уже было отмечено, одним из способов построения ОП является установление соответствий между решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Решениями уравнения вида $B_\nu f = \lambda f$ являются функции Бесселя, а уравнения $D^2 f = \lambda f$— тригонометрические функции или экспонента. Поэтому прообразами ОП вида (2) были формулы Пуассона и Сонина:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})2^{\nu-1}x^\nu}\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(t)\,dt, \Re\nu > \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{\pi}2^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}\frac{d}{dx}\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu+1}J_\nu(t)\,dt, -\frac{1}{2} < \Re\nu < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Формулы (3)–(4) приведены и доказаны в [26], проблема только в том, что если формула Пуассона (3) является общеизвестной и приведена во многих источниках, то другой ссылки на формулу (4) я не знаю, в том числе не нашёл её и в работах Н.Я. Сонина. Известна несколько другая формула Сонина

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}\int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin(t)\,dt, -\frac{1}{2} < \Re\nu < \frac{1}{2}.$$

Определение 2 *ОП Пуассона называется выражение*

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \Re\nu > -\frac{1}{2}. \tag{5}$$

ОП Сонина называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\,dt, \Re\nu < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Операторы (5)–(6) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{7}$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$.

Идею изучения операторов, подобных (5)–(6), высказывал ещё Лиувилль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Николай Яковлевич Сонин. Как ОП эти операторы были введены в работах Дельсарта [18]–[21] и затем изучены в работах Дельсарта и Лионса [22]–[25]. Поэтому мы будем называть (5)–(6) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). В нашей стране об операторах СПД в основном узнали из великолепно написанной статьи Б. М. Левитана [26].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (5)–(6) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП, их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ. В частности, в последнее время активно изучаются аналоги ОП СПД для дифференциально–разностного оператора Дункля, являющегося в некотором смысле квадратным корнем из оператора Бесселя.

3 Связь операторов преобразования с дробным интегродифференцированием

Операторы дробного интегродифференцирования играют важную роль во многих современных разделах математики: уравнениях с частными производными, функциональном анализе и теории функций, специальных функциях, многочисленных приложениях (см. энциклопедическую монографию [27], а также [28]–[33]). Для теории специальных функций важность дробного интегродифференцирования отражена в названии известной статьи [34]: "***Все специальные функции получаются дробным интегродифференцированием элементарных функций***"! (Замечание проф. А.А. Килбаса: кроме функций Фокса!)

Приведём список основных операторов дробного интегродифференцирования: Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, дробного интеграла по произвольной функции $g(x)$

$$I^\alpha_{0+,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{8}$$

$$I^\alpha_{-,x} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

$$I^\alpha_{0+,x^2} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1} 2t f(t)dt, \tag{9}$$

$$I^{\alpha}_{-,x^2}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\left(t^2-x^2\right)^{\alpha-1}2tf(t)d\,t,$$

$$I^{\alpha}_{0+,g}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x}\left(g(x)-g(t)\right)^{\alpha-1}g'(t)f(t)d\,t, \tag{10}$$

$$I^{\alpha}_{-,g}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\left(g(t)-g(x)\right)^{\alpha-1}g'(t)f(t)d\,t,$$

во всех случаях предполагается, что $\Re\alpha>0$, на оставшиеся значения α формулы также без труда продолжаются [27]. При этом обычные дробные интегралы (8) получаются при выборе в (10) $g(x)=x$, Эрдейи–Кобера (9) при выборе $g(x)=x^2$, Адамара при $g(x)=\ln x$.

Связь с ОП проявляется в том, что, как видно из (5)–(6), ОП СПД с точностью до множителей как раз и являются операторами Эрдейи–Кобера, то есть дробными степенями $(\frac{d}{dx^2})^{-\alpha}$. Поэтому основные свойства этих ОП можно получить из теории операторов дробного интегродифференцирования, а не изобретать заново, что нередко и делалось. И многие другие задачи теории ОП обнаруживают тесную связь с операторами дробного интегродифференцирования. А.М. Джрбашян обратил моё внимание на тот факт, что операторы дробного интегрирования по функции (10) являются частными случаями несколько более общих операторов, которые были введены и изучались его отцом М.М. Джрбашяном [27].

4 Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи

Рассмотрим важный класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Определение 3 *Операторами Бушмана–Эрдейи называются интегральные операторы*

$$B^{\nu,\mu}_{0+}f=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}P^{\mu}_{\nu}\left(\frac{x}{t}\right)f(t)d\,t, \tag{11}$$

$$E^{\nu,\mu}_{0+}f=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}\mathbb{P}^{\mu}_{\nu}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)d\,t, \tag{12}$$

$$B^{\nu,\mu}_{-}f=\int_x^{\infty}\left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}P^{\mu}_{\nu}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)d\,t, \tag{13}$$

$$E^{\nu,\mu}_{-}f=\int_x^{\infty}\left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}\mathbb{P}^{\mu}_{\nu}\left(\frac{x}{t}\right)f(t)d\,t. \tag{14}$$

Здесь $P^{\mu}_{\nu}(z)$—функция Лежандра первого рода [35], $\mathbb{P}^{\mu}_{\nu}(z)$—та же функция на разрезе $-1\le t\le 1$, $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x\to 0, x\to\infty$. Параметры μ,ν—комплексные числа, $\Re\mu<1$, можно ограничиться значениями $\Re\nu\ge -1/2$.

Данные операторы были введены и первоначально исследованы в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами и их факторизации. Эти результаты изложены в монографии [27], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается. Первое достаточно полное исследование операторов Бушмана–Эрдейи проведено автором в [36]–[39], при этом необходимо отметить, что их сплетающие свойства как ОП вообще ранее не отмечались в литературе. Операторы Бушмана–Эрдейи, включая их многомерные версии с интегрированием по пирамидальной области, изучались также в работах А.А. Килбаса и его учеников [40].

Термин "операторы Бушмана–Эрдейи" как наиболее исторически оправданный был введён автором в [36]–[37], впоследствии он использовался другими авторами, см., например, [43]. Ранее в [27] встречался термин "операторы Бушмана".

Важность операторов Бушмана–Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными [27]: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана–Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области [41].

Приведём основные результаты, следуя в изложении [36]–[37]. Вначале распространим определение 3 на важный предельный случай $\mu = 1$.

Определение 4 *Введём при $\mu = 1$ операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам*

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{15}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{16}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\, dt, \tag{17}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = (-\frac{d}{dx}) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{18}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$—функция Лежандра.

Разумеется, при очевидных дополнительных условиях на функции в (15)–(18) можно продифференцировать под знаком интеграла или соответственно проинтегрировать по частям.

Теорема 4.1 *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи на подходящих функциях через операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, дробные интегралы Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера:*

(19) $$B_{0+}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{1-\mu} B_{0+}^{\nu,1} = I_{0+}^{\nu+2-\mu}\ x\ I_{0+,x^2}^{-(\nu+1)}\ 2^{\nu+1}\ x^{\nu-1}.$$

Аналогичные представления получены для оставшихся трёх операторов из (11)–(14).

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним оператор, который при целых неотрицательных ν совпадает с оператором углового момента из квантовой механики

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right). \tag{20}$$

Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 4.2 *Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетают L_ν и вторую производную:*

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \tag{21}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \tag{22}$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетают оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{23}$$

Разумеется, по указанным формулам можно перейти и наоборот от ОП для оператора Бесселя к ОП для оператора углового момента. Мы сохраним за ОП, действующим по формулам (21), названия ОП типа Сонина и Пуассона соответственно.

Теорема 4.3 *Операторы Бушмана–Эрдейи $B_{0+}^{\nu,\mu}, E_{-}^{\nu,\mu}$ на подходящих функциях являются ОП типа Сонина, а $B_{-}^{\nu,\mu}, E_{0+}^{\nu,\mu}$ являются ОП типа Пуассона, они действуют по формулам (21).*

Доказательства процитированных выше теорем приведены в [36].

Отметим, что из того установленного в [36] факта, что операторы Бушмана–Эрдейи являются ОП, в качестве частного случая следует, что они связывают собственные функции соответствующих дифференциальных операторов, а именно, тригонометрические функции и функции Бесселя, аналогично формулам Пуассона и Сонина (3)–(4). Соответствующие обобщения формул Пуассона и Сонина можно явно выписать.

Теперь рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, введённых по формулам (15). Подобный оператор был построен В. В. Катраховым путём домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который бы действовал в одном пространстве типа $L_2(0,\infty)$, что неверно для тех операторов, из которых он был составлен с помощью композиции. Как впоследствии оказалось, это можно сделать ранее известными средствами, так как ОП Сонина—это частный случай операторов Эрдейи–Кобера. Существует замечательная теорема А. Эрдейи, позволяющая выделить стандартный дробный интеграл Римана–Лиувилля из дробного интеграла по любой функции [27]. В результате получается

Теорема 4.4 *(см. [36]). На подходящих функциях справедливо представление оператора Эрдейи–Кобера через дробный интеграл Римана–Лиувилля и оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости при $0 < \Re\alpha < 1$*

$$I^\alpha_{0+,x^2} = I^\alpha_{0+}\left((2x)^\alpha f + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_{-\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)(2t)^\alpha f(t)\,dt\right). \tag{24}$$

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа $L_p(0,\infty)$. При этом, учитывая свёрточную структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина.

Напомним [42], что преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция $g(s)$, которая определяется по формуле

$$g(s) = M[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{25}$$

Определим также свёртку Меллина

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{y}\right) f_2(y)\, \frac{dy}{y}, \tag{26}$$

при этом оператор свёртки с ядром K действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор

$$M[Af](s) = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, \frac{dy}{y} = M[K * f](s) = m_A(s) M[f](s), \tag{27}$$
$$m_A(s) = M[K](s).$$

Для изучения операторов вида (27) автором в [36]–[37] был предложен удобный алгебраический подход, который не содержит ничего нового, но в удобной форме позволяет быстро получать нужные оценки. Полезные факты будут собраны вместе как

Теорема 4.5 *Пусть оператор A действует по формуле (27). Тогда*
а) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = M_2 < \infty, \tag{28}$$

при этом $\|A\|_{L_2} = M_2$.
б) Для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_p(0,\infty), p > 1$ при дополнительном условии неотрицательности ядра K необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{p})| = M_p < \infty, \tag{29}$$

при этом $\|A\|_{L_p} = M_p$.
в) Обратный оператор A^{-1} действует также по формуле (27) с мультипликатором $\frac{1}{m_A}$, для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = m_2 < \infty, \tag{30}$$

при этом $\|A^{-1}\|_{L_2} = \frac{1}{m_2}$.
г) Пусть операторы A, A^{-1} определены и ограничены в $L_2(0,\infty)$. Они унитарны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$|m_A(i\xi + \frac{1}{2})| = 1 \tag{31}$$

для почти всех ξ.

Первым математиком, использовавшим технику преобразования Меллина при оценке норм операторов Римана–Лиувилля для случая чисто мнимого параметра, был, насколько мне известно, Кобер. Поэтому иногда часть б) приведённой теоремы называется леммой Кобера, что не совсем точно, так как он на самом деле доказал формулу для нормы из части а) для случая знакопеременных функций.

Данный подход позволяет легко описать и сплетающие свойства ОП вида (27).

Теорема 4.6 *(см. [36]). Пусть оператор действует по правилу (27). Тогда он является ОП типа Сонина (21) на подходящих функциях тогда и только тогда, когда его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению*

$$m(s) = m(s-2)\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)-\nu(\nu+1)}. \tag{32}$$

Все подобные ОП типа Сонина тогда получаются по формуле (27) с мультипликатором $p(s)m(s)$, где $p(s)$—произвольная периодичная функция с периодом 2, то есть $p(s) = p(s-2)$.

Таким образом, в теореме 4.8 содержится полное описание ОП типа Сонина, представимых в виде свёртки Меллина, а также явный алгоритм их конструирования. Аналогичный результат справедлив и для операторов типа Пуассона. Конкретные примеры ОП с помощью теоремы 4.8 построены в [36]–[37], при этом используются преобразования Стильтьеса и Гильберта на полуоси.

Теперь применим теорему 4.7 к операторам Бушмана–Эрдейи. Для краткости приведём результаты только для одного оператора из четырёх.

Теорема 4.7 *Оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости $B_{0+}^{\nu,1}$, определённый по формуле (15), действует по правилу (27) с мультипликатором*

$$m(s) = \frac{\Gamma(-s/2+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-s/2-\frac{\nu}{2}+1/2)}{\Gamma(1/2-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} \tag{33}$$

при условии $\Re s < \min(2+\Re\nu, 1-\Re\nu)$. Для его нормы, которая является периодической функцией по ν, справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2} = \frac{1}{\min(1, \sqrt{1-\sin\pi\nu})}. \tag{34}$$

Оператор ограничен в $L_2(0,\infty)$ при $\nu \neq 2k+1/2, k \in \mathbb{Z}$ и неограничен при выполнении условия $\nu = 2k+1/2, k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство.

1. Вначале докажем формулу (27) с нужным мультипликатором (33). Используя последовательно формулы (7), с. 130, (2) с. 129, (4) с. 130 из [42], получим

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}M\left[\int_0^\infty \left\{H(\frac{x}{y}-1)P_\nu(\frac{x}{y})\right\}\{yf(y)\}\frac{dy}{y}\right](s-1) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1)M\left[f\right](s),$$

где использованы обозначения из [42] для функции Хевисайда и усечённой степенной функции

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}, \ H(x) = x_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее, используя формулы 14(1) с. 234 и 4 с. 130 из [42], получаем

$$M\left[(x-1)_+^0 P_\nu^0(\sqrt{x})\right](s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-s)\Gamma(-\frac{\nu}{2}-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}-s)},$$

$$M\left[(x^2-1)_+^0 P_\nu^0(x)\right](s-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})\Gamma(-\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2})}{\Gamma(1-\frac{s-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s-1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+1)}$$

при условиях $\Re s < \min(2+\Re\nu, 1-\Re\nu)$. Отсюда выводим формулу для мультипликатора

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{s}{2}+1).$$

Применяя к $\Gamma(2-s)$ формулу Лежандра удвоения аргумента гамма–функции (см., например, [35]), получим

$$M(B_{0+}^{\nu,1})(s) = \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-s)}.$$

Ещё одно применение формулы удвоения Лежандра к $\Gamma(1-s)$ приводит к нужной формуле для мультипликатора (33).

В работе [36] показано, что за счёт рассмотрения подходящих факторизаций, условия справедливости доказанной формулы, которые являются завышенными, можно несколько расширить. В частности, формула для мультипликатора справедлива при условиях $0 < \Re s < 1$ при всех значениях параметра ν.

2. Теперь установим формулу для нормы (34). Из найденной формулы для мультипликатора в силу теоремы 4.7 получаем на прямой $\Re s = 1/2, s = iu + 1/2$

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)}\right|.$$

Далее будем опускать у мультипликатора указание на порождающий его оператор. Используем формулу для модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ и тождество для гамма–функции $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$, вытекающее из её определения в виде интеграла. Последнее равенство справедливо для класса так называемых вещественно–аналитических функций, к которому относится и гамма–функция. Тогда получим

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})\Gamma(i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iu)\Gamma(\frac{1}{2}+iu)}\right|.$$

В числителе объединим крайние и средние сомножители, и три образовавшиеся пары гамма–функций преобразуем по известной формуле (см. [35])

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\ \Gamma(\frac{1}{2}-z)=\frac{\pi}{\cos\pi z}.$$

В результате получим

$$|M(B_{0+}^{\nu,1})(iu+1/2)|=\sqrt{\frac{\cos(\pi i u)}{2\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}+i\frac{u}{2})\cos\pi(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{u}{2})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\pi i u)}{\operatorname{ch}\pi u-\sin\pi\nu}}$$

Далее обозначим $t=\operatorname{ch}\pi u, 1\leqslant t<\infty$. Отсюда, применяя условие из теоремы 4.7, получаем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}|m(iu+\frac{1}{2})|=\sup_{1\leqslant t<\infty}\sqrt{\frac{t}{t-\sin\pi\nu}}.$$

Поэтому, если $\sin\pi\nu\geqslant 0$, то супремум достигается при $t=1$, и справедлива формула (34) для нормы

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin\pi\nu}}.$$

Если же $\sin\pi\nu\leqslant 0$, то супремум достигается при $t\to\infty$, и справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=1.$$

Эта часть теоремы доказана.

3. Условия ограниченности или неограниченности следуют из найденной формулы для нормы и условий теоремы 4.7. Периодичность нормы по параметру ν очевидна из найденного явного выражения для нормы. Теорема полностью доказана.

Аналогичные результаты получены в [36]–[37] и для пространств со степенным весом.

Известно, что разносторонние операторы Римана–Лиувилля связаны друг с другом при помощи преобразования Стильтьеса [27]. Соответствующие результаты получены в [36] и для операторов Бушмана–Эрдейи.

В [36]–[37] введены и рассмотрены некоторые обобщения ОП Бушмана–Эрдейи, ядра которых выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса и более общую G–функцию Мейера. Подобные обобщения другого рода, в которых рассматриваются операторы с интегрированием по всей полуоси и ядра выражаются через обобщённые функции Лежандра, изучались в [43]. Для исследования всех указанных операторов могут оказаться полезными различные неравенства для гипергеометрических функций, например, полученные в [44]–[48].

5 Построение унитарных операторов преобразования

Рассмотрим вопрос об унитарности в $L_2(0,\infty)$ ОП типа Сонина и Пуассона. Ещё в ранних работах Дельсарта, Лионса и Левитана было замечено, что стандартные ОП Сонина и Пуассона (5)–(6) не сохраняют гладкость функций, что создаёт различные сложности при их применении. Так возникла задача о построении унитарных ОП. Следующим шагом стало построение унитарных ОП хотя бы для некоторых значений параметров.

Теорема 5.1 *Для унитарности в $L_2(0,\infty)$ операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости (15) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. При этом пары операторов (15)–(17) и (16)–(18) являются взаимно обратными.*

Доказательство.

При $\nu \in \mathbb{Z}$ получим $\sin \pi\nu = 0$ и модуль соответствующего мультипликатора в формуле (33) тождественно равен единице на нужной прямой $\Re s = \frac{1}{2}$. Поэтому, по свойству г) теоремы 4.7 данный оператор является унитарным в $L_2(0,\infty)$, как и его обратный. То, что соответствующие пары операторов являются взаимно обратными, теперь следует из того, что они являются сопряжёнными в $L_2(0,\infty)$. Теорема доказана.

Отметим, что случай унитарности данных операторов преобразования совпадает со случаем, когда сплетаемый ими дифференциальный оператор (20) в точности является оператором углового момента из квантовой механики при целых ν.

Эта теорема была первоначально сформулирована в [49]–[50], доказательство содержало ошибки (утверждалась унитарность при всех ν), затем скорректированные в [51],[41], см. также [52]–[58].

Задача о построении унитарных ОП типа Сонина и Пуассона для оператора Бесселя (или углового момента) в общем случае для произвольного ν была окончательно решена автором в [59]–[61] в рамках разработанного им композиционного метода. Это потребовало введения операторов несколько более сложной структуры.

Теорема 5.2 *Следующие операторы являются ОП типа Сонина и Пуассона, взаимно обратными и унитарными при всех ν:*

$$S_U^{\nu} f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^{\infty} P_{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \tag{35}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x \left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy -$$
$$-\int_x^{\infty}\left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{\nu}^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\Big),$$
$$P_U^{\nu} f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x P_{\nu}\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right) f(y)\,dy -$$
$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\Big(\int_0^x \left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{\nu}^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy -$$
$$-\int_x^{\infty}\left(y^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} Q_{\nu}^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\Big)\Big),$$

где P_{ν}—функция Лежандра первого рода, Q_{ν}^1—функция Лежандра второго рода, $\mathbb{Q}_{\nu}^1$—функция Лежандра второго рода на разрезе [35].

Доказательство.

Аналогично случаю теоремы 4.9 с использованием свёртки Меллина и формул для преобразования Меллина специальных функций получается следующая формула для мультипликатора:

$$M(S_U^{\nu})(s) = -\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)+$$

$$+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right)=$$

$$=\left(-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi s-\cos\pi\nu}{\sin\pi s-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right)\cdot\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}\right).$$

Полностью вычисления проведены в [36]. Далее рассматриваем в соответствии с теоремой 4.7 с учётом выкладок из теоремы 4.9 величину

$$\left|M(S_U^\nu)(iu+\frac{1}{2})\right|=$$

$$=\left|-\sin(\frac{\pi\nu}{2})\left(\frac{-\cos\pi(iu+\frac{1}{2})-\cos\pi\nu}{\sin\pi(iu+\frac{1}{2})-\sin\pi\nu}\right)+\cos(\frac{\pi\nu}{2})\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin(\frac{\pi\nu}{2})-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\pi iu\right)}{\sin\pi\nu-\cos\pi iu}\right|\cdot\sqrt{\frac{\cos\pi u-\sin\pi\nu}{\cos\pi u}}=$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u+i\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}\right|.$$

Вычисляя модуль и заменяя затем тригонометрический и гиперболический синусы на косинусы, получим:

$$\left|M(S_U^\nu)(iu+\frac{1}{2})\right|=\sqrt{\frac{\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}\pi u\right)^2+\left(\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}\pi u\right)^2}{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\pi u-\sin\pi\nu\operatorname{ch}\pi u}{\operatorname{ch}\pi u(\operatorname{ch}\pi-\sin\pi\nu)}}=1.$$

Унитарность этим доказана. Взаимная сопряжённость следует из определения (35), если рассматривать операторы в соответствии с указанием в начале статьи как расширения с множества финитных функций. Следовательно, эти унитарные операторы и взаимно обратны. То, что они являются ОП типа Сонина и Пуассона, вытекает из формул теоремы 4.8. Теорема доказана.

Этим результатом завершается история построения унитарных ОП типа Сонина и Пуассона. Унитарные операторы преобразования тесно связаны с унитарностью оператора рассеяния в задачах квантовой механики [13]–[14].

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 5.1 при $\nu=1$. Получаем пару очень простых операторов

$$B_{0+}^{1,1}f=f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy,\ B_{-}^{1,1}f=f(x)-\int_x^\infty\frac{f(y)}{y}\,dy, \tag{36}$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1f=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, H_2f=\int_x^\infty\frac{f(y)}{y}\,dy. \tag{37}$$

По поводу теории неравенств Харди см. [62]–[63]. Из наших результатов следует

Теорема 5.3 *Операторы (36) образуют пару взаимнообратных унитарных в* $L_2(0,\infty)$ *операторов. Они сплетают как ОП* $\frac{d^2}{dx^2}$ *и* $\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2}{x^2}$.

Как следует из (37), операторы Бушмана–Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определёнными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (36) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [36]–[37] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из теоремы 5.1 был недавно переоткрыт Куфнером, Перссоном и Малиграндой, давшими его элементарное доказательство. Теорема 8 позволяет выписать ещё несколько пар унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов очень простого вида, которые являются частными случаями операторов Бушмана–Эрдейи при целых ν ([64]–[66]):

$$U_3f=f+\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y},\ U_4f=f+\frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy,$$

$$U_5f=f+3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2},\ U_6f=f-\frac{3}{x^2}\int_0^x yf(y)\,dy,$$

$$U_7f=f+\frac{3}{x^2}\int_x^\infty yf(y)\,dy,\ U_8f=f-3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},$$

$$U_9f=f+\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{15x^2}{y^3}-\frac{3}{y}\right)f(y)\,dy,$$

$$U_{10}f=f+\frac{1}{2}\int_x^\infty\left(\frac{15y^2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)f(y)\,dy.$$

Этот перечень можно продолжить дальше. На мой взгляд подобных простых явных примеров очень не хватает в курсах функционального анализа.

Полученные в данной работе результаты имеют также применения к доказательству вложений пространств И.А. Киприянова в весовые пространства С.Л. Соболева, см. [36], [67].

Операторы Бушмана–Эрдейи можно изучать в пространствах аналитических функций, в которых они действуют почленно на степенных рядах. При такой интерпретации они относятся к операторам Гельфонда–Леонтьева. Получены стандартные для такого класса задач оценки коэффициентов искажения и однолистности.

Для оценок норм ОП Бушмана–Эрдейи в функциональных пространствах могут использоваться обобщения интегрального неравенства Коши–Буняковского, метод получения таких обобщений разработан автором в [68]–[70].

Литература

1. R. Carroll. Transmutation and Operator Differential Equations, North Holland. 1979. 245 p.
2. R. Carroll. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions, North Holland. 1982. 457 p.
3. R. Carroll. Transmutation Theory and Applications, North Holland. 1986. 351 p.
4. R. Gilbert, H. Begehr. Transformations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1–2, Longman, Pitman, 1992.
5. Kh. Trimeche. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators (Mathematical Reports, Vol 4, Part 1), Harwood Academic Publishers. 1988. 282 p.
6. Д.К. Фаге, Н.И. Нагнибида. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов, Новосибирск: Наука. 1977. 280 с.
7. В.А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля, Киев: Наукова Думка. 1972. 220 с.
8. В.А. Марченко. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения, Киев: Наукова Думка. 1977. 331 с.
9. Б.М. Левитан. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения, М.: ГИФМЛ. 1962. 324 с.
10. Б.М. Левитан. Обратные задачи Штурма–Лиувилля, М.: Наука. 1984. 240 с.
11. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака, М.: Наука. 1988. 432 с.
12. И.А. Киприянов. Сингулярные эллиптические краевые задачи, М.: Наука-Физматлит. 1997. 204 с.
13. Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния-1// УМН. 1959. Т. 14, № 4. С. 57–119.
14. Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния-2// "Итоги науки и техники "Современные проблемы математики. т. 3". ВИНИТИ. 1974. С. 93–180.
15. А.П. Хромов. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов// Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. № 10. С. 3–163.
16. С.М. Ситник. Обзор: Операторы преобразования и их приложения, В книге: "Исследования по современному анализу и математическому моделированию" (Отв. ред. Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.). Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008. С. 226–293.

17. R. Carroll, A. Boumenir. Toward a general theory of transmutation// arXiv: funct-an/9501006. 1995. 19 p.

18. J. Delsarte. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre// C. R. Acad. Sci. Paris. 1938. V. 206. P. 1780–1782.

19. J. Delsarte. Sur une extension de la formule de Taylor// Journ. Math. pures et appl. 1938. V. 17. P. 217–230.

20. J. Delsarte. Une extension nouvelle de la théory de fonction presque périodiques de Bohr// Acta Math. 1939. V. 69. P. 259–317.

21. J. Delsarte. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation// Colloques Internat. Nancy. 1956. P. 29–44.

22. J.L. Lions. Opérateurs de Delsarte et problème mixte// Bull. Soc. Math. France. 1956. No. 84. P. 9–95.

23. J.L. Lions. Quelques applications d'opérateurs de transmutations// Colloques Internat. Nancy. 1956. P. 125–142.

24. J. Delsarte, J.L. Lions. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe// Comm. Math. Helv. 1957. No. 32. P. 113–128.

25. J. Delsarte, J.L. Lions. Moyennes généralisées// Comm. math. Helv. 1959. No. 34. P. 59–69.

26. Б.М. Левитан. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// УМН. 1951. Т. 6, Вып. 2. С. 102–143.

27. А.А. Килбас, О.И. Маричев, С.Г. Самко. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

28. V. Kiryakova. Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Math. Series No. 301. Longman Sci. UK. 1994. 402 p.

29. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Truhillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North Holland Mathematical Studies. Vol. 204. Elsevier. 2006. 523 p.

30. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии, М.: Высшая Школа. 1995. 301 с.

31. А.М. Нахушев. Элементы дробного исчисления и их применение, Нальчик. 2000. 300 с.

32. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение, М.: Физматлит. 2003. 273 с.

33. А.В. Псху. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка, Нальчик. 2005. 186 с.

34. V. Kiryakova. All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions// J. Physics A: Math. & General. 1997. Vol. 30, No. 14. P. 5085–5103.

35. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1., М.: Наука. 1973. 296 с.

36. С.М. Ситник. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости// Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1990. 45 с.

37. С.М. Ситник. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи// ДАН СССР. 1991. т.320, №6. С. 1326–1330.

38. Г.В. Ляховецкий, С.М. Ситник. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи// Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1991. 11 с.

39. С.М. Ситник. Об одной паре операторов преобразования// В сб.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (Отв. ред. В.Н. Врагов). Новосибирск. 1987. С. 168–173.

40. А.А. Килбас, О.В. Скоромник. Интегральное уравнение типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области// Тезисы докладов международной конференции АМАДЕ. Минск. 2009. С. 83.

41. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом// ДАН СССР. 1984. Т. 278, №4. С. 797–799.

42. О.И. Маричев. Метод вычисления интегралов от специальных функций, Минск: Наука и техника. 1978. 312 с.

43. N. Virchenko, I. Fedotova. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications, World Scientific. 2001. 220 p.

44. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. V. 207, No. 2. P. 331–337.

45. D. Karp, S.M. Sitnik. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity,// Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. V. 205. P. 186–206.

46. D. Karp, S.M. Sitnik. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function// Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161. P. 337—352.

47. D. Karp, S.M. Sitnik. Log–convexity and log–concavity of hypergeometric-like functions// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. (in print).

48. С.М. Ситник. Неравенства для функций Бесселя// ДАН СССР. 1995. Т. 340, № 1. С. 29–32.

49. В.В. Катрахов. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов// ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 5.—С. 1048–1051.

50. В.В. Катрахов. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона// ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1041–1045.

51. С.М. Ситник. Краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений с сильным вырождением// В сб.: Материалы XXI Всесоюзной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосибирск. 1983. С. 55–58.

52. С.М. Ситник. Об унитарных операторах преобразования// Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7770–В86. 1986. Воронежский университет, Воронеж. 9 с.

53. С.М. Ситник. Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя Рукопись депонирована в ВИНИТИ 23.01.1987, N 535–В87. 1987. Воронежский университет, Воронеж. 28 с.

54. С.М. Ситник. L_2–теория операторов преобразования и её приложения к эллиптическим уравнениям// В сб.: 10-е Чехословацко–Советское совещание: Применение фукциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики. 1988. Стара Тура, Чехословакия. С. 46.

55. С.М. Ситник, С.А. Фадеев. Об одной паре операторов преобразования// Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.07.1988, № 5629–В88. Воронеж, Воронежский политехнический институт. 1988.

56. С.М. Ситник. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи в функциональных пространствах// В сб.: "Линейные операторы в функциональных пространствах". Тезисы докладов Северо–Кавказской региональной конференции. 1989. Грозный. С. 150.

57. С.М. Ситник. Операторы Бушмана–Эрдейи// В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Международная научная конференция. 1992. Самара. С. 233–234.

58. S.M. Sitnik. On unitary transmutations for the Bessel operator// В сб.: Международный семинар Day on diffraction 2004. Санкт–Петербург. 2004. С. 71.

59. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Метод факторизации в теории операторов преобразования// В сб.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В.Н. Врагов). 1990. Новосибирск. С. 104–122.

60. В.В. Катрахов, С.М. Ситник. Композиционный метод построения B–эллиптических, B–гиперболических и B–параболических операторов преобразования// ДАН СССР. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

61. С.М. Ситник. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1 (67). С. 237–248.

62. B. Opic, A. Kufner. Hardy–Type Inequalities, Longman. 1990.

63. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. The Hardy Inequality, Pilsen. 2007. 162 p.

64. С.М. Ситник. О некоторых задачах теории операторов преобразования// Материалы международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвящённой 70–летию ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовничего. 2009. М.: МГУ. С. 49–50.

65. С.М. Ситник, Об одном обобщении операторов Харди методами теории операторов преобразования// В сб.: Международная конференция по математической физике и её приложениям. Тезисы докладов. Самара: Самарский государственный университет. 2008. С. 191–192.

66. С.М. Ситник. Унитарные операторы преобразования, связанные с операторами Харди// Тезисы докладов третьей международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 85–летию члена–корреспондента РАН профессора Льва Дмитриевича Кудрявцева. Москва: МФТИ. 2008. С. 324–327.

67. С.М. Ситник. О теоремах вложения для пространств С.Л. Соболева и И.А. Киприянова В сб.: Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Россия, Новосибирск. 2008. С. 359.

68. С.М. Ситник. Уточнения интегрального неравенства Коши–Буняковского// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико–Математические науки". 2000. Вып. 9. С. 37–45.

69. С.М. Ситник. Обобщения неравенств Коши–Буняковского методом средних значений и их приложения// Чернозёмный альманах научных исследований. 2005. № 1(1). С. 3–42.

70. С.М. Ситник. Уточнения и обобщения классических неравенств// Итоги науки (Южный федеральный округ). Математический форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу. Владикавказ, 2009. С. 221–266.

ON SOLUTION TO THE PROBLEM OF UNITARY GENERALIZATION TO THE SONINE–POISSON TRANSMUTATIONS

S.M. Sitnik

Voronezh Militia Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Prospekt Patriotov, 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. We consider generalizations to well-known Sonine and Poisson transmutations. They are Buschmann–Erdelyi operators. For these operators we consider composition formulae via fractional integrals and problems of unitarity, invertibility, boundedness. We find generalizations to Sonine and Poisson transmutations which are unitarian for all values of parameter.

Keywords: Sonine and Poisson transmutations, Buschmann–Erdelyi operators, fractional integrals, bounded operators, unitarian operators.

УДК 511.35

О СУММИРОВАНИИ ФУНКЦИИ $\tau_k(n)$ ПО ЧИСЛАМ, ЛЕЖАЩИМ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача получения асимптотической формулы для суммы значений функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью специального вида, при растущем k.

Ключевые слова: свойство ортогональности характеров, оценка суммы характеров по специальному модулю, процесс исчерпывания криволинейной области И.М.Виноградова.

Рассмотрим задачу получения асимптотической формулы для суммы значений функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью D, являющейся степенью простого нечетного числа, где $\tau_k(n)$ означает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \ldots x_k = n$. Эта асимптотика при фиксированном $k \geq 2$ получена в [6]. При этом $D \leq \frac{3}{8} - \epsilon$, $0 < \epsilon < \frac{3}{8}$ произвольно мало. С ростом параметров k и D задача получения асимптотики усложняется, так как поведение $\tau_k(n)$ становится более сложным, а прогрессия более редкой. Специальный вид разности D позволяет получить лучший результат. В данной статье получена асимптотика для суммы значений $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью указанного вида, при растущем k.

Лемма 1 *Для любого неглавного характера χ по модулю D*

$$\sum_{1\leq u\leq a} \chi(u) \ll D^{\frac{1}{6}} \ln D a^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство см. в [4].

Лемма 2 *(основная). Пусть $D \leq x^{\frac{3}{8}}$; $N_1,\ldots N_k, \delta$—вещественные числа,$N_i \geq \frac{1}{2}$, $i = 1,\ldots k$, $x^{\frac{1}{2}} \leq N_1 \ldots N_k < x$, $0 < \delta \leq \frac{1}{2k}$;$N = \max\{N_i\}$;*

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1<n_1\leq 2N_1 \\ n_1\ldots n_k\leq x}} \ldots \sum_{N_k<n_k\leq 2N_k} \chi(n_1 \ldots n_k).$$

Тогда

$$S \ll \frac{x^{1+1,7\delta}}{D} N^{-1} \max_{N\leq T\leq 2N, \chi\neq\chi_0} \left|\sum_{t\leq T} \chi(t)\right| \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} +$$
$$+ \frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\ln x + k - 2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

равномерно по k,причем,константа в знаке $\ll$ зависит от p,δ.

Доказательство.

Будем предполагать,что $N_1 \geq N_2 \geq N_{r+1} \geq N_3 \geq N_{r+2} \geq \ldots$, где $r = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$.Положим $U = N_2 \ldots N_r$, $V = N_{r+1} \ldots N_k$.Тогда $N_1 V \geq U \geq V$,так как $N_1 \geq N_2$,$N_{r+1} \geq N_3, \ldots$ и $N_2 \geq N_{r+1}$, $N_3 \geq N_{r+2}, \ldots$.Кроме того,$N = N_1$ и $N_1 \geq x^{\frac{1}{2k}}$.

Пусть $\tau'_{r-1}(u), \tau''_{k-r}(v), \tau'_{k-1}(y)$ соответственно означают количество решений в натуральных числах уравнений

$$n_2 \ldots n_r = u, \qquad n_{r+1} \ldots n_k = v, \qquad n_2 \ldots n_k = y,$$

где $N_2 < n_2 \leq 2N_2, \ldots, N_k < n_k \leq 2N_k$.

Рассмотрим случай $U \leq x^\delta$. Имеем:

$$|S| = \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \chi(n_2) \ldots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_k) \sum_{N_1 < n_1 \leq 2N_1} \chi(n_1) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \chi(n_2) \ldots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_k) \max_{N_1 < T' \leq T'' \leq 2N_1, \chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \right| \right\}$$

В силу леммы 1 справедлива оценка

$$\sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \ll N_1^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}} \ln D.$$

следовательно,

$$S \ll N_2 \ldots N_k \sqrt{N_1} D^{\frac{1}{6}} \ln D.$$

Так как $N_1 \ldots N_k < x, V \leq U \leq x^\delta, D \leq x^{\frac{3}{8}}, \ln x \ll x^{\frac{\delta}{2}}$, то для суммы S получим:

$$S \ll N_2 \ldots N_k \sqrt{N_1} D^{\frac{1}{6}} \ln D = \sqrt{N_2 \ldots N_k} \sqrt{N_1 N_2 \ldots N_k} D^{\frac{1}{6}} \ln D <$$
$$< \sqrt{UV} \sqrt{x} D^{\frac{1}{6}} \ln D \leq x^{\frac{1}{2}+\delta} D^{\frac{1}{6}} \ln D \ll x^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\delta} D^{-\frac{1}{3}}.$$

Пусть теперь $U > x^\delta$. Докажем,что в этом случае

$$S \ll x^{\frac{\delta}{2}} \max_{\substack{N_1 \leq T' \leq T'' \leq 2N_1 \\ UV \leq Y' \leq Y'' \leq 2^{k-1} UV}} \{|S'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2 \right)^{k-2}}{\varphi(D)\,(k-2)!}, \tag{1}$$

где

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \sum_{Y < y \leq Y''} \chi(y) \tau'_{k-1}(y).$$

Прямоугольной областью на плоскости (t, y) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$T' < t \leq T'', \quad Y' < y \leq Y'',$$

где $N_1 \le T' < T'' \le 2N_1, UV \le Y' < Y'' \le 2^{k-1}UV$. Сумму S перепишем в виде

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < t \le 2N_1 \\ ty \le x}} \sum_{UV < y \le 2^{k-1}UV} \chi(t)\chi(y)\tau'_{k-1}(y).$$

Если $2N_1 \cdot 2^{k-1}UV \le x$, то (1) тривиально верно в силу того, что тогда область суммирования в S по переменным t и y прямоугольная.

Докажем (1) в случае, когда $N_1UV < x < 2^{k-1}UV$. Определим величины T_1, T_2, полагая

$$T_1 = \max\left\{N_1, \frac{x}{2^{k-1}UV}\right\}, \quad T_2 = \min\left\{2N_1, \frac{x}{UV}\right\}.$$

Так как $\frac{x}{2^{k-1}UV} < 2N_1$ и $N_1 < \frac{x}{UV}$, то

$$N_1 \le T_1 < T_2 \le 2N_1, \quad UV \le \frac{x}{T_2} < \frac{x}{T_1} \le 2^{k-1}UV. \tag{2}$$

Обозначим через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ области на плоскости (t, y), задаваемые соответственно неравенствами

$$N_1 < t \le T_2, \quad UV < y \le \frac{x}{T_2};$$
$$N_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x;$$
$$N_1 < t \le T_1, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x;$$
$$T_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x$$

(некоторые из них могут оказаться пустыми). Область Ω, которая задается на плоскости (t, y) неравенствами

$$N_1 < t \le 2N_1, \quad UV < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x$$

совпадает с областью, задаваемой неравенствами

$$N_1 < t \le T_2, \quad UV < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x.$$

Действительно, из неравенств $UV < y$ и $ty \le x$ следует $t \le \frac{x}{UV}$, а из неравенств $t \le 2N_1, t < \frac{x}{UV}$ имеем $t \le T_2$.Из этого в силу (2),а также из определения $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ получаем $\Omega =$
$= \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_3$, причем $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_4$ попарно не пересекаются. Область Ω_3 либо пустая, либо прямоугольная,Ω_1 также либо пустая, либо прямоугольная. Область Ω_3 прямоугольная. Ω_4 совпадает с областью, которая задается неравенствами

$$T_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le \frac{x}{t},$$

поскольку из определения T_1 и неравенств $y \le \frac{x}{t}, \quad T_1 < t$ следует $y < 2^{k-1}UV$.

Таким образом утверждение (1) достаточно доказать для

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1 < t \le T_2} \sum_{\frac{x}{T_2} < y \le \frac{x}{t}} \chi(t)\chi(y)\tau'_{k-1}(y).$$

Пусть T_0 и Δ таковы, что $T_1 \le T_0 < T_0+\Delta \le T_2$. Область Ω', ограниченную на плоскости (t,y) неравенствами

$$T_0 < t \le T_0+\Delta, \quad \frac{x}{T_0+\Delta} < y \le \frac{x}{t},$$

будем называть криволинейным треугольником на плоскости (t,y) с основанием, равным Δ. любой криволинейный треугольник с основанием, равным Δ, можно представить как объединение попарно непересекающихся прямоугольной области и двух криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{\Delta}{2}$. Повторяя этот процесс s раз мы получим, что каждый криволинейный треугольник Ω' с основанием, равным Δ, есть объединение попарно непересекающихся областей—2^s криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{\Delta}{2^s}$ и $1+2+\ldots+2^{s-1}=2^s-1<2^s$ прямоугольных областей.

Положим $s_0=\left[\frac{\delta}{2}\log_2 x\right]$. В сумме S_1 область суммирования по t и y является криволинейным треугольником с основанием, равным T_2-T_1. Представим ее в виде объединения попрано непересекающихся подобластей — 2^{s_0} криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{T_2-T_1}{2^{s_0}}$ и не более чем 2^{s_0} прямоугольных областей. Оценим сумму S_2 по одному из таких криволинейных треугольников. Пусть

$$S_2=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{T_1'<t\le T_2'}\ \sum_{\frac{x}{T_2'}<y\le\frac{x}{t}}\chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

Если через S_3 обозначим такую же сумму, как и S_2, но суммирование по χ распространено на все характеры по $\operatorname{mod} D$, то

$$\begin{aligned}|S_2-S_3| &= \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{T_1'<t\le T_2'}\ \sum_{\frac{x}{T_2'}<y\le\frac{x}{t}}\chi_0(t)\chi_0(y)\tau_{k-1}'(y)\le\\ &\le\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{T_1'<t\le T_2'}\ \sum_{\frac{x}{T_2'}<y\le\frac{x}{t}}\tau_{k-1}(y)\le\\ \le\frac{1}{\varphi(D)}(T_2'-T_1'+1)&\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{x}{T_2'}-\frac{x}{T_1'}+1\right)\left(\ln\left(\frac{x}{T_2'}-\frac{x}{T_1'}+1\right)+k-2\right)^{k-2}\le\\ &\le\frac{1}{\varphi(D)}\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{N_1}{2^{s_0}}+1\right)\left(\frac{x}{2^{s_0}N_1}+1\right)\left(\ln\frac{x}{2^{s_0}N_1}+k-2\right)^{k-2},\end{aligned}\tag{3}$$

в силу того,что основание криволинейного треугольника $T_2'-T_1'=\frac{T_2-T_1}{2^{s_0}}\le\frac{N_1}{2^{s_0}}$, а высота

$$\frac{x}{T_1'}-\frac{x}{T_2'}=\frac{x}{T_1'T_2'}(T_2'-T_1')\le\frac{x}{N_1^2}\cdot\frac{N_1}{2^{s_0}}=\frac{x}{2^{s_0}N_1}.$$

Положим

$$S_4=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{T_1'<t\le T_2'}\ \sum_{\frac{x}{T_2'}<y\le\frac{x}{T_1'}}\chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

S_3 и S_4 равны числу решений, соответственно, сравнений

$$\begin{gathered}n_1\ldots n_k\equiv l\pmod D,\quad T_1'<n_1\le T_2',\quad N_2<n_2\le 2N_2,\ldots,N_k<n_k\le 2N_k,\\ \frac{x}{T_2'}<n_2\ldots n_k\le\frac{x}{n_1},\\ n_1\ldots n_k\equiv l\pmod D,\quad T_1'<n_1\le T_2',\quad N_2<n_2\le 2N_2,\ldots,N_k<n_k\le 2N_k,\\ \frac{x}{T_2'}<n_2\ldots n_k\le\frac{x}{T_1'}.\end{gathered}$$

Область на плоскости (t, y), задаваемая неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\frac{x}{T_2'} < y \le \frac{x}{t}$ содержится в области, задаваемой неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\frac{x}{T_2'} < y \le \frac{x}{T_1'}$.Поэтому

$$0 \le S_3 \le S_4.$$

Аналогично, как и при выводе (3), получаем

$$S_4 - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \le T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \le \frac{x}{T_1'}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\varphi(D)} \frac{1}{(k-2)!} \left(\frac{N_1}{2^{s_0}} + 1\right)\left(\frac{x}{2^{s_0}N_1} + 1\right)\left(\ln\frac{x}{2^{s_0}N_1} + k - 2\right)^{k-2} \le$$
$$\le \frac{1}{\varphi(D)} \frac{1}{(k-2)!} \left(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2\right)^{k-2} \left(\frac{x}{2^{2s_0}} + \frac{N_1}{2^{s_0}} + \frac{x}{2^{s_0}N_1} + 1\right) \ll$$
$$\ll \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0}\varphi(D)(k-2)!}.$$

Имеем

$$S_2 \ll S_3 + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0}\varphi(D)(k-2)!} \le S_4 + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0}\varphi(D)(k-2)!} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \le T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \le \frac{x}{T_1'}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y) \right| + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0}\varphi(D)(k-2)!}.$$

В силу неравенств $T_1 \le T_1' < T_2' \le T_2$ и условий (2) справедливы неравенства

$$N_1 \le T_1' < T_2' \le 2N_1, \quad UV \le \frac{x}{T_2'} < \frac{x}{T_1'} \le 2^{k-1}UV.$$

Следовательно, для суммы S_2 получим

$$S_2 \ll \max_{\substack{N_1 \le T' < T'' \le 2N_1 \\ UV \le Y' < Y'' \le 2^{k-1}UV}} \{|S'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0}\varphi(D)(k-2)!}.$$

Так как S_1 является суммой $< 2^{s_0} \ll x^{\frac{\delta}{2}}$ слагаемых вида S' и $2^{s_0} \ll x^{\frac{\delta}{2}}$ слагаемых виды S_2, то неравенство (1) справедливо для S_1. Таким образом, доказательство неравенства (1) завершено.

Далее

$$\sum_{T' < t \le T''} \chi(t) = \sum_{1 < t \le T''} \chi(t) - \sum_{1 < t \le T'} \chi(t),$$
$$\sum_{Y' < t \le Y''} \chi(y)\tau_{k-1}'(y) = \sum_{1 < t \le Y''} \chi(y)\tau_{k-1}'(y) - \sum_{1 < t \le Y'} \chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

Поэтому из неравенства (1) получаем:

$$S \ll x^{\frac{\delta}{2}} \max_{\substack{N_1 \le T \le 2N_1 \\ UV \le Y \le 2^{k-1}UV}} \{|S_1'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}, \tag{4}$$

где

$$S_1' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t\leq T} \chi(t) \sum_{y\leq Y} \chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

Возможны два случая: $V \leq x^\delta$ и $V > x^\delta$. Рассмотрим случай $V \leq x^\delta$. Оценим сумму $S_1' = S_1'(T,Y)$ при $N_1 \leq T \leq 2N_1, \quad UV \leq Y \leq 2^{k-1}UV$. Имеем:

$$|S_1'| = \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t\leq T} \chi(t) \sum_{V<v\leq 2^{k-r}V} \chi(v)\tau_{k-r}''(v) \sum_{U<u\leq U_v} \chi(u)\tau_{r-1}'(u) \right|,$$

где $U_v = \min\left\{2^{r-1}U, \frac{U}{v}\right\}$. Отсюда имеем:

$$|S_1'| \leq \max_{\chi\neq\chi_0} \left\{ \left| \sum_{t\leq T} \chi(t) \right| \right\} \sum_{N_{r+1}<n_{r+1}\leq 2N_{r+1}} \cdots \sum_{N_k<n_k\leq 2N_k} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \left| \sum_{U<u\leq U_v} \chi(u)\tau_{r-1}'(u) \right|. \qquad (5)$$

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \left| \sum_{U<u\leq U_v} \chi(u)\tau_{r-1}'(u) \right| \leq (\sigma_1)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U<u\leq U_v} \chi(u)\tau_{r-1}'(u) \right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сранения

$$n_2\ldots n_r \equiv n_2'\ldots n_r' \pmod D; \quad N_2 < n_2, n_2' \leq 2N_2, \ldots, N_r < n_r, n_r' \leq 2N_r,$$
$$U < n_2\ldots n_r, n_2'\ldots n_r' \leq U_v.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\leq U_v} \tau_{r-1}(u) \sum_{\frac{U-u}{D}<d\leq\frac{U_v-u}{D}} \tau_{r-1}(u+dD) \leq$$
$$\leq \sum_{U<u\leq U_v} \tau_{r-1}(u) e^{r-1} \left(\frac{U}{D}+1\right) \left(\ln\frac{U}{D}\right)^{r-2} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{(r-2)!} \left(\frac{U^2}{D}+U\right) e^{r-1} \left(\ln\frac{U}{D}\right)^{r-2} (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2}.$$

Отсюда

$$\sigma \ll \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{r-2}{2}}. \qquad (6)$$

Из (5), (6), а также по лемме (1) получим:

$$S_1' \ll \max_{\chi\neq\chi_0} \left\{ \left| \sum_{t\leq T} \chi(t) \right| \right\} V \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{r-2}{2}} \ll$$
$$\ll V N_1^{1/2} D^{1/6} \ln D \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Так как

$$N_1^{1/2}U = (N_1U)^{1/2}(U^2)^{1/4} \ll x^{1/2}(N_1UV)^{1/4} \le x^{3/4},$$
$$(N_1U)^{1/2} \ll x^{1/2}, \quad x^{1/2}D^{1/6} \ll x^{3/4}D^{-1/3},$$

то

$$S_1' \ll x^{1,1\delta}(x^{3/4}D^{-1/3} + x^{1/2}D^{1/6})\frac{e^{\frac{k}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом при $V \le x^{\delta}$ получаем:

$$S \ll x^{3/4+1,6\delta}D^{-1/3}\frac{e^{\frac{k}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x + k - 2)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}.$$

Рассмотрим оставшийся случай, когда $V > x^{\delta}$. Покажем, что для суммы $S_1' = S_1'(T, Y)$ при $N_1 < T \le 2N_1, \quad UV < Y \le 2^{k-1}UV$ справедлива оценка

$$S_1' \ll x^{\delta} \max_{\substack{U \le U' < U'' \le 2^{r-1}U \\ V \le V' < V'' \le 2^{k-r}V}} \{|S''|\} + \frac{x^{1-\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}, \tag{7}$$

где

$$S'' = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \ne \chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t \le T}\chi(t)\sum_{U' < u \le U''}\sum_{V' < v \le V''}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Прямоугольной областью на плоскости (u, v) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$U' < u \le U'', \quad V' < v \le V'',$$

где $U \le U' < U'' \le 2^{r-1}U, \quad V \le V' < V'' \le 2^{k-r}V$.

Сумма S_1' переписывается в виде

$$S_1' = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \ne \chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t \le T}\chi(t)\sum_{U < u \le 2^{r-1}U}\sum_{V < v \le 2^{k-r}V, uv \le Y}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Положим

$$U_1 = \max\left\{U, \frac{Y}{2^{k-r}V}\right\}, \quad U_2 = \min\left\{2^{r-1}U, \frac{Y}{V}\right\}.$$

Если $Y \ge 2^{k-1}UV$, то область суммирования по u, v в сумме S_1' прямоугольная и утверждение (7)справедливо.

Пусть $UV < Y < 2^{k-1}UV$. Тогда $U_1 < U_2$. Из определения U_1 и U_2 получаем:

$$U \le U_1 < U_2 \le 2^{r-1}U, \quad V \le \frac{Y}{U_2} < \frac{Y}{U_1} \le 2^{k-r}V. \tag{8}$$

Обозначим через $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ на плоскости (u,v) следующие области соответственно:

$$\begin{aligned}
&U < u \le U_2, \quad V < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U < u \le U_2, \quad V < v \le \frac{Y}{U_2},\\
&U < u \le U_2, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U < u \le U_1, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U_1 < u \le U_2, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y.
\end{aligned}$$

Область суммирования в сумме S_1' по переменным u,v совпадает с областью ω. При этом $\omega = \omega_1 \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \omega_3 \cup \omega_4$, а $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ попарно не пересекаются. Область ω_3 либо пустая, либо прямоугольная. Это же справедливо и для ω_1. Область ω_4 совпадает с областью, задаваемой неравенствами $U_1 < u \le U_2$, $\frac{Y}{U_2} < v \le \frac{Y}{u}$. Таким образом, (7) достаточно доказать для суммы

$$S_2' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U_1 < u \le U_2} \sum_{\frac{Y}{U_2} < v \le \frac{Y}{u}} \chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Криволинейным треугольником на плоскости (u,v) с основанием, равным Δ_1 назовем область

$$U_0 < u \le U_0 + \Delta_1, \quad \frac{Y}{U_0 + \Delta_1} < v \le \frac{Y}{u},$$

где $U_1 \le U_0 < U_0 + \Delta_1 \le U_2$. Положим $s_1 = [\delta \log_2 x]$. Как и при выводе (1) область суммирования по u,v в сумме S_2' представим в виде объединения поперно непересекающихся областей, из которых $< 2^{s_1}$ прямоугольных и 2^{s_1} криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{U_2 - U_1}{2^{s_1}}$. Оценим сумму S_2' по одному из таких треугольников. Пусть

$$S_3' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U_1' < u \le U_2'} \sum_{\frac{Y}{U_2'} < v \le \frac{Y}{u}} \chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Если S_4'—такая же сумма, как S_3', но суммирование по χ распространено на все характеры по $mod \quad D$, то

$$S_4' - S_3' \le \frac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!} (U_2' - U_1' + 1) \left(\frac{Y}{U_2'} - \frac{Y}{U_1'} + 1 \right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \cdot$$

$$\cdot \left(\ln \frac{Y}{U} + k - r - 1 \right)^{k-r-1}.$$

Положим

$$S_5' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (mod D)} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U_1' < u \le U_2'} \sum_{\frac{Y}{U_2'} < v \le \frac{Y}{U_1'}} \chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Так как область суммирования по u,v суммы S_4' содержится в области суммирования по u,v суммы S_5' и S_4', S_5' выражают количество решений сравнения, то

$$0 \leq S_4' \leq S_5'.$$

Оценивая слагаемое с $\chi=\chi_0$ в сумме S_5', получаем:

$$S_3' \ll \frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t\leq T}\chi(t)\sum_{U_1'<u\leq U_2'}\sum_{\frac{Y}{U_2'}<v\leq\frac{Y}{U_1'}}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v)\right|+$$
$$+\frac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!}\left(U_2'-U_1'+1\right)\left(\frac{Y}{U_2'}-\frac{Y}{U_1'}+1\right)(\ln U+r-2)^{r-2}\left(\ln\frac{Y}{U}+k-r-1\right)^{k-r-1}.$$

Так как $U_2'-U_1'=\frac{U_2-U_1}{2^{s_1}}$, $\quad U_1\leq U_1'\leq U_2'\leq U_2$ и U_1,U_2 удовлетворяют (8),то

$$\frac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!}\left(U_2'-U_1'+1\right)\left(\frac{Y}{U_2'}-\frac{Y}{U_1'}+1\right)(\ln U+r-2)^{r-2}\left(\ln\frac{Y}{U}+k-r-1\right)^{k-r-1}\leq$$
$$\leq\frac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!}\left(\frac{U}{2^{s_1}}+1\right)\left(\frac{Y}{U_1 2^{s_1}}+1\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\leq$$
$$\leq\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}\left(\frac{N_1UV}{2^{2s_1}}+\frac{N_1UV}{2^{s_1}}\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{V}\right)+\frac{N_1UV}{UV}\right)\leq$$
$$\leq\frac{x^{1-\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}}{2^{s_1}\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}.$$

Отсюда

$$S_3'\ll\max_{\substack{U\leq U'<U''\leq 2^{r-1}U\\ V\leq V'<V''\leq 2^{k-r}V}}\{|S''|\}+\frac{x^{1-\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}}{2^{s_1}\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}.$$

Сумма S_2' равна сумме $<2^{s_1}$ слагаемых вида S'' и 2^{s_1} слагаемых вида S_3'. Поэтому

$$S_2'\ll x^{\delta}\max_{\substack{U\leq U'<U''\leq 2^{r-1}U\\ V\leq V'<V''\leq 2^{k-r}V}}\{|S''|\}+\frac{x^{1-\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}}{2^{s_1}\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}.$$

Таким образом (7) доказано.

Оценим сумму S''. Имеем:

$$S''\leq\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right|\left|\sum_{U'<u\leq U''}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\right|\left|\sum_{V'<v\leq V''}\chi(v)\tau_{k-r}''(v)\right|\leq$$
$$\leq\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right|\right\}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{U'<u\leq U''}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\right|\left|\sum_{V'<v\leq V''}\chi(v)\tau_{k-r}''(v)\right|.$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$S''\ll\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right|\right\}\cdot\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{U'<u\leq U''}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{V'<v\leq V''}\chi(v)\tau_{k-r}''(v)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим,что сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{U'<u\le U''}\chi(u)\tau'_{r-1}(u)\right|^2$$

равна количеству решений сравнения

$$n_2\dots n_r\equiv n'_2\dots n'_r \pmod D;\quad N_2<n_2,n'_2\le 2N_2,\dots,N_r<n_r,n'_r\le 2N_r,$$
$$U'<n_2\dots n_r, n'_2\dots n'_r\le U''.$$

Для количества решений этого сравнения имеем оценку:

$$\sum_{U'<u\le U''}\tau_{r-1}(u)\sum_{\frac{U'-u}{D}<d\le\frac{U''-u}{D}}\tau_{r-1}(u+dD)\le$$
$$\le\frac{e^{r-1}}{(r-2)!}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)\left(\ln\frac{U}{D}\right)^{r-2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2}(\ln U+r-2)^{r-2}\ll$$
$$\ll\frac{e^{r-1}}{(r-2)!}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2(r-2)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2}.$$

Аналогично имеем:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{V'<u\le V''}\chi(v)\tau''_{k-r}(v)\right|^2\ll$$
$$\ll\frac{e^{k-r}}{(k-r-1)!}\left(\frac{V^2}{D}+V\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2(k-r-1)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-r-1}.$$

Следовательно,

$$S''\ll\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}.$$

В силу неравенств $T\le 2N_1,\quad V\le U\le N_1V,\quad N_1UV<x,\quad D\le x^{\frac{3}{8}}$ и леммы 1 получим:

$$\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}\ll$$
$$\ll N_1^{\frac12}D^{\frac16}\ln x\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}\ll$$
$$\ll\frac{x^{0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{\sqrt{U}\sqrt{N_1UV}}{D^{\frac13}}+\sqrt{N_1UV}D^{\frac16}\right)\ll$$
$$\ll\frac{x^{0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{x^{1/2}(N_1UV)^{1/4}}{D^{1/3}}+x^{1/2}D^{1/6}\right)\ll$$
$$\ll\frac{x^{3/4+0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}D^{-1/3}$$

И так как $\frac{UV}{D} < \frac{x}{N_1 D}$ имеем:

$$S'' \ll \frac{x^{1+0,2}\delta}{D} N_1^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \frac{e^{\frac{k-1}{2}} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} + \\ + \frac{x^{3/4+0,2\delta} e^{\frac{k-1}{2}} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-1/3}.$$

Из (7) следует, что

$$S_1' \ll \frac{x^{1+1,2}\delta}{D} N_1^{-1} \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \frac{e^{\frac{k-1}{2}} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} + \\ + \frac{x^{3/4+1,2\delta} e^{\frac{k-1}{2}} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-1/3} + \frac{x^{1-\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{\varphi(D) \left(\frac{k}{2} - 1\right)! \left(\frac{k}{2} - 2\right)!}.$$

В силу (4) получаем:

$$S \ll \frac{x^{1+1,7\delta}}{D} N^{-1} \max_{N \leq T \leq 2N, \chi \neq \chi_0} \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} + \\ + \frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} + \\ + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\ln x + k - 2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Доказательство леммы 2 завершено.

Лемма 3 *Пусть* χ*—произвольный неглавный характер по* mod D, $D = p^n$, $p \geq 3$, p*— фиксированное простое число,* $S_a = \sum_{m \leq a} \chi(m)$, $\rho = \frac{\ln D}{\ln a}$. *Тогда существуют константы* $c > 0, \gamma > 0$, *зависящие от* p, *такие, что при* $1 \leq \rho \leq 0,5n$ *выполняется оценка*

$$|S_a| < ca^{1-\frac{\gamma}{\rho^2}}$$

Доказательство(см. [3]).

Теорема 1 *При* $(l, D) = 1$, $\quad D \leq x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ *справедлива формула*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{x Q_{k-1}(\ln x)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D) \left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa} \right),$$

где $Q_{k-1}(z)$*—многочлен степени* $k-1$ *от переменной* z *с коэффициентами, зависящими от* k *и* p, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\gamma}{10k^3}\right\}$, $\gamma > 0$*—константа, зависящая от* p. *Данная формула имеет место для всех* $k \leq \left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)^{1/4}$.

Доказательство.

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(modD)}} \tau_k(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi(modD)} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1\dots n_k\le x} \chi(n_1\dots n_k).$$

В сумме по характерам χ выделим слагаемое с $\chi = \chi_0$:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(modD)}} \tau_k(n) = W + R,$$

где

$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n_1\dots n_k\le x\\ n_1\dots n_k\not\equiv 0(modD)}} 1, \quad R = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1\dots n_k\le x} \chi(n_1\dots n_k).$$

Запишем W в виде

$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n_1\not\equiv 0(modp)\\ n_1\dots n_k\le x}} 1 \dots \sum_{n_k\not\equiv 0(modp)} 1.$$

Представим каждую сумму по переменным суммирования $n_i \not\equiv 0(modp)$ как разность суммы, где переменная суммирования n_i пробегает все значения, и суммы, где переменная суммирования n_i пробегает значения, сравнимые с нулем по модулю p. Воспользуемся также асимптотической формулой:

$$\sum_{n\le x_1} \tau_k(n) = x_1 P_{k-1}(\ln x_1) + O\left(x_1^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

где $P_{k-1}(z)$—многочлен степени $k-1$ от переменной z (см. [7]). Тогда

$$\begin{gathered} W = \frac{1}{\varphi(D)} \left(\sum_{n_1} 1 - \sum_{n_1\equiv 0(modp)} 1\right) \dots \left(\sum_{n_k} 1 - \sum_{n_k\equiv 0(modp)} 1\right) = \\ n_1\dots n_k \le x \\ = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{1\le s_1<\dots<s_j\le k} \sum \dots \sum_{\substack{n_1\dots n_k\le x\\ n_{s_1}\equiv 0(modp),\dots,n_{s_j}\equiv 0(modp)}} 1 = \\ = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{n_1\equiv 0(modp)} \dots \sum_{n_j\equiv 0(modp)} \sum_{n_{j+1}} \dots \sum_{n_k} 1 \\ n_1\dots n_k \le x = \\ = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{x\le \frac{x}{p^j}} \tau_k(n) = \frac{x}{\varphi(D)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} P_{k-1}\left(\ln \frac{x}{p^j}\right) + \\ + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right) = \frac{x}{\varphi(D)} Q_{k-1}(\ln x) + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

где $Q_{k-1}(z)$—многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от p и k.

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll \ln^k x$ слагаемых вида

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\leq 2N_1\\ n_1\ldots n_k\leq x}}\ldots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\chi(n_1\ldots n_k).$$

Пусть $N=\max N_i$, $\quad A=N^{-1}\sum_{t\leq T}\chi(t)$, где $N\leq T\leq 2N$, $D_1=p^{m_1}$—модуль, по которому характер χ примитивный. Оценим величину A. Так как $N=\max N_i\geq x^{\frac{1}{k}}$, $\quad D_1\leq D\leq x^{\frac{3}{8}}$, то $\dfrac{\ln D_1}{\ln T}\leq k$. Возможны случаи:

- $\frac{m_1}{20}>k$, $\frac{\ln D_1}{\ln T}>1$, $m_1>81$. В этом случае по лемме 3 величина $A\ll N^{-\frac{\gamma}{k^3}}\ll x^{-\frac{\gamma}{2k^3}}$, так как $N\geq x^{\frac{1}{2k}}$.

- $T\geq D_1$. Тогда

$$A\ll\frac{\sqrt{D_1}\ln D_1}{N}\leq\frac{\sqrt{T}\ln T}{N}\ll N^{-\frac{1}{2}}\ln x\leq x^{-\frac{1}{4k}}\ln x.$$

- $m_1\leq\max\{81,20k\}\leq 41k$. В этом случае сумму характеров оценим модулем D_1. Имеем:

$$A\leq\frac{p^{m_1}}{N}\leq\frac{p^{41k}}{N}\ll\frac{x^{k\frac{\ln p}{\ln x}}}{x^{\frac{1}{k}}}\leq\frac{x^{\overline{\frac{c}{(\ln x)^{3/4}}}}}{x^{\frac{1}{k}}}\leq x^{\frac{c}{k^3}-\frac{1}{k}}.$$

  Так как $\frac{1}{2k^3}<\frac{1}{4k}$ и в лемме константа $\gamma<1$, то во всех случаях $A\ll x^{-\frac{\gamma}{2k^3}}$.

Таким образом, по лемме 1 имеем:

$$S\ll\frac{x^{1+1{,}7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}D^{-\frac{1}{3}}+$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x+k-2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Учитывая, что в R входит $\ll\ln^k x$ слагаемых вида S, получаем, что

$$R\ll\frac{x^{1+1{,}7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}D^{-\frac{1}{3}}+$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x+k-2\right)^{2k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Выберем параметр $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4}, \dfrac{\gamma}{5k^3}\right\}$, то есть в любом случае $\delta \le \frac{\gamma}{5k^3}$. Отсюда и из условия $D \le x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ находим:

$$R \ll + \frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x + k - 2)^{2k-2}}{\varphi(D)(k-2)!} \ll$$
$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} \left(x^{1+1{,}7\delta - \frac{2}{3}\varepsilon} + x^{1-\delta/2}\right).$$

В силу определения величины δ, если $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\gamma}{5k^3}$, то

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} \left(x^{1-\frac{\varepsilon}{4}} + x^{1-\frac{\varepsilon}{8}}\right) \ll$$

$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{\varepsilon}{8}},$$

а если $\frac{\varepsilon}{4} > \frac{\gamma}{5k^3}$, то

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} \left(x^{1-0{,}9\frac{\gamma}{5k^3}} + x^{1-\frac{\gamma}{10k^3}}\right) \ll$$
$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{\gamma}{10k^3}},$$

следовательно,

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa}, \varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\gamma}{10k^3}\right\}.$$

Заметим, что остаток в (9) не превосходит величины

$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{1}{2k}} \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa},$$

поскольку $\frac{\gamma}{10k^3} < \frac{1}{10k^3} < \frac{1}{2k}$.

Для определения верхней границы возможных k сравним полученную формулу с неравенством Марджанишвили (см. [3]):

$$\sum_{n\le x} \tau_k(n) \le \frac{x\,(\ln x + k - 1)^{k-1}}{D(k-1)!}.$$

То есть необходимо:

$$\frac{x^{1+1{,}7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}D^{-\frac{1}{3}}+$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x+k-2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}\ll\frac{x\left(\ln x+k-1\right)^{k-1}}{D(k-1)!}.$$

Сравнивая последнее слагаемое, имеем:

$$\frac{x(\ln x)^k(\ln x+k-2)^{k-2}}{x^{\delta/2}\varphi(D)(k-2)!}\le\frac{x}{D}\frac{(\ln x+k)^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$(\ln x)^k\le x^{\delta/2}<x^{\frac{\gamma}{k^3}}$$
$$k\ln\ln x\le\tfrac{\gamma}{k^3}\ln x,$$
$$k^4\le\frac{\ln x}{\ln\ln x},\quad k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}.$$

Сравнивая первое слагаемое, имеем:

$$\frac{x^{1+1{,}7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}\le\frac{x}{D}\frac{(\ln x+k)^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$\frac{(\ln x)^{k-2}}{x^{0{,}8\delta}}\le\frac{e^{\frac{k^2}{2\ln x}}}{k^{k/2}},$$
$$k\ln\ln x-\frac{\ln x}{k^3}\le\frac{k^2}{\ln x}-k\ln k,$$
$$k\ln\ln x<k\ln\ln x+k\ln k<\frac{k^2}{\ln x}+\frac{\ln x}{k^3}<\frac{\ln x}{k^3},$$
$$k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}.$$

Аналогичную оценку для k получаем и для второго слагаемого. Таким образом, равномерную оценку суммы $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod D}}\tau_k(n)$ возможно получить для $k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}$.

Теорема доказана.

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды. — М., изд. Ан СССР, 1952.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976.
3. Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел. 2-е изд.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.
4. Линник Ю. В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. — Ленинград, Наука, 1980.
5. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах.– Издательство ЛГУ, 1961.
6. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью,равной степени простого нечетного числа. Докл. АН СССР, Серия математическая, 43, номер 4(1979),с.892-908.
7. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М., ИЛ, 1953.

ABOUT SUMMATION OF FUNCTION $\tau_k(n)$ ON NUMBERS LYING IN ARITHMETICAL PROGRESSION

M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. Consider the problem of getting the asymptotic formula for the sum of the values of function $\tau_k(n)$ on numbers lying in arithmetical progression with difference of special kind for rising k.

Keywords: property of character's orthogonality, estimation of character sums modulo of special kind, I. M. Vinogradov's process of the depletion of curvilinear domain.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абаполова Е.А.	– ассистент кафедры естественно-научных и математических дисциплин Старооскольского филиала Белгородского государственного университета
Авад Х.К.	– аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Алдашев С.А.	– доктор физико-математических наук, профессор, директор Института прикладной математики и информатики Актюбинского государственного университета им. К. Жубанова
Асхабов С.Н.	– кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики и компьютерных технологий Чеченского государственного университета, г. Грозный
Вирченко Ю.П.	– доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Белгородского государственного университета
Глушак А.В.	– доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информационных технологий Белгородского государственного университета
Гриценко Св.А.	– старший преподаватель кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета
Гриценко С.А.	– доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, теории чисел и геометрии Белгородского государственного университета
Зимин Р.Н.	– аспирант кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета
Кожанов А.И.	– доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск
Ляпин А.П.	– кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий образования Института педагогики, психологии и социологии Сибирского федерального университета, г. Красноярск
Мазманишвили А.С.	– доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Сумского государственного университета
Маслакова Л.Ф.	– ассистент кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета
Мейрманов А.М.	– доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики Белгородского государственного университета
Михалкин Е.Н.	– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики его преподавания Красноярского государственного педагогического университета
Мотькина Н.Н.	– старший преподаватель кафедры алгебры, теории чисел и геометрии Белгородского государственного университета
Расулов А.Б.	– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского энергетического института

Ситник С.М.	– кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского института МВД России
Шевцова М.В.	– ассистент кафедры алгебры и теории чисел Белгородского государственного университета
Солдатов А.П.	– доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Белгородского государственного университета

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Принимаются рукописи статей, написанные на русском (или на английском) языке, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу, соответственно, математиков и физиков. Ни в коем случае, рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (соответственно, условий проведения эксперимента). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована – разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение.

Во введении должна быть кратко описана проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, должна быть дана краткая история вопроса и описан полученный автором (ами) результат. В заключении должна быть дана краткая характеристика полученного результата и указано его значение в дальнейшем развитии темы работы.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются для обзорной статьи, с той лишь разницей, что её содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Принимаются также для публикации статьи, носящие методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается отдельным решением редколлегии журнала.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

Рукопись должна состоять из следующих частей:

1) основной содержательной части, представляемой на русском или английском языках. Она должна начинаться указанием номера УДК того научного направления, которому посвящена статья. Затем следует название статьи. Оно должно состоять не более чем из 20 слов. Далее приводится список авторов статьи, затем следует полностью основная часть рукописи;

2) аннотации на русском языке. Её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

3) списка ключевых слов (не более 10-12).

4) перевода заглавия, аннотации и ключевых слов на английский язык;

5) списка литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

6) данных об авторах статьи с указанием места работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке, должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

7) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи;

8) укороченного заголовка статьи, состоящего не более, чем из трёх слов, который печатается в колонтитулах журнала.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения с авторским оригиналом при редактировании.

Если в рукописи имеются рисунки, то они должны быть подготовлены в формате "eps" и соответствующие им файлы необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п. 7).

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации цифровых меток, соответствующих номеру формулы. Допускается применение для нумерации формул цифр, снабжённых штрихами. Однако, этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста. В случае, если в статье имеются части в виде приложений, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть не зависимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения;

3) то же самое касается литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи. Их нужно отмечать цифрами в порядке появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.